

RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Reinhard Schmidt

Die Anwendung von
Zustandsbeobachtern zur
Schwingungsüberwachung und
Schadensfrüherkennung auf
mechanische Konstruktionen

Heft Nr. 60



Mitteilungen
aus dem
Institut für Mechanik

**Institut für Mechanik
Ruhr-Universität Bochum**

Reinhard Schmidt

**Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur
Schwingungsüberwachung und Schadensfrüherkennung
auf mechanische Konstruktionen**

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr.60
August 1988**

Herausgeber:

Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

© 1988 Reinhard Schmidt
 Elberfelderstr. 125
 4322 Sprockhövel 1

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung
(Fotokopie, Mikropie) bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

Vorwort

In den letzten Jahren hat sich der Verfasser am Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum in der Arbeitsgruppe Numerisches Rechnen und Simulationstechnik mit Beobachtertheorien zur Schwingungsüberwachung befaßt. Das Manuskript mit dem Thema "Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen" ist der Fakultät für Maschinenbau vorgelegt worden.

Auf diesem Weg möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Waller für die ständige Bereitschaft zur fachlichen und persönlichen Diskussion bedanken. Herrn Prof. Dr.-Ing. O. T. Bruhns danke ich für die freundliche Übernahme des Korreferates.

Allen Mitarbeitern der Arbeitsgruppe Numerisches Rechnen und Simulationstechnik vielen Dank für die jederzeit gute Zusammenarbeit und kollegiale Unterstützung.

Doktorarbeit eingereicht am : 27. April 1988

Tag der mündlichen Prüfung : 15. Juli 1988

Referent : Prof. Dr.-Ing. H. Waller

Korreferent : Prof. Dr.-Ing. O.T. Bruhns

Zusammenfassung

Technische Konstruktionen wie Maschinen und Bauwerke sind vielfältigen dynamischen Belastungen ausgesetzt. Um ihre Funktionstüchtigkeit zu gewährleisten, werden zum einen Berechnungen mit mathematischen Modellen und zum anderen Messungen an realen Systemen durchgeführt. Eine Schwingungsmessung ist aber normalerweise nicht an allen gefährdeten Stellen möglich, sondern nur an wenigen zugänglichen Punkten. Aus der Regelungstechnik sind sogenannte Zustandsbeobachter bekannt. Diese schätzen unter Ausnutzung der vorhandenen Meßwerte in Kombination mit dem mathematischen Rechenmodell den vollständigen Bewegungszustand der Struktur.

Gegenstand dieser Arbeit ist die spezielle Anpassung und Anwendung solcher Zustandsbeobachter für Aufgaben der Schwingungsüberwachung, Lebensdauerberechnung und Schadensfrüherkennung. Die notwendigerweise hohe Anzahl von Freiheitsgraden zur Modellierung der betrachteten großen Strukturen problematisiert die Anwendung der Zustandsbeobachter. Eine Lösung bietet der mit den Methoden der Modalanalyse entwickelte "modale Beobachter". Seine Einsatzmöglichkeiten zur Überwachung von Systemparametern wie Eigenfrequenz, Dämpfung und Korrekturfaktoren der Steifigkeitsmatrix, die für eine Schadensfrüherkennung interessant sind, werden vorgestellt. Im Hinblick auf die praktische Anwendung der Algorithmen wird auf die besonderen Eigenschaften, die dem Rechenmodell für einen solchen Beobachterentwurf zugrunde liegen müssen, eingegangen. Simulationsrechnungen und Laborversuche verdeutlichen an Beispielen die vielfältigen Einsatzmöglichkeiten der Verfahren.

Summary

Technical Systems like machinery and buildings are strained by manifold dynamic stresses. To guarantee their functioning calculations with mathematical models on the one hand and measurements at real systems on the other hand are carried out. It must be noted that generally those vibrations can not be measured at every critical partial property of the system but rather at a few accessible points. Control theory provides so called 'observers' which estimate the complete state of the system by using the given measurements in combination with the mathematical model.

Subject to this paper is the description of special adjustments and application of these observers for monitoring vibrations, calculations of the life of the system and fault detection. But the use of these observers causes problems, especially for large systems. This is mainly due to the high number of degrees of freedom within the mathematical model. A solution provides the "modal observer" developed by methods of modal analysis. Its range of application for monitoring special system parameters is shown. The most important of these parameters are eigenfrequency, damping and factors of the stiffness matrix which are required for fault detection. With regard to the practical service of the algorithms the special characteristics of the mathematical model for the design of these observers are considered. Simulations and experiments help to clarify the wide range of application.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
1 Einleitung	1
2 Beobachterentwurf	4
2.1 Der Einsatz von Beobachtern zur Überwachung von Schwingungssystemen	4
2.2 Allgemeines zum Beobachter	5
2.3 Unterschiede zwischen dem Beobachterentwurf in der Regelungstechnik und in der Strukturdynamik	8
2.4 Der Übergang vom kontinuierlichen zum zeitdiskreten System	9
2.5 Beobachtbarkeit	13
2.6 Verfahren zum Beobachterentwurf	16
2.6.1 Zur Auswahl geeigneter Entwurfsverfahren	16
2.6.2 Allgemeine Eigenschaften von Beobachtern	18
2.7 Reduktion der Systemfreiheitsgrade durch "modale Beobachter"	29
2.7.1 Allgemeines	29
2.7.2 Modaltransformation von Beobachter und System bei zeitkontinuierlicher Rechnung	30
2.7.3 Modaltransformation von Beobachter und System bei zeitdiskreter Rechnung	32
2.7.4 Modifizierte reelle Modalform	32
2.7.5 Reduktion der Freiheitsgrade des Beobachters	34
2.8 Schadensfrüherkennung mit Hilfe von Beobachtern	39
2.9 Erweiterung des Beobachters um einen Formfilter	39
3 Parameterschätzung	43
3.1 Allgemeines zur Parameterschätzung	43
3.2 Methode der gewichteten kleinsten Quadrate	45
3.3 Parameterschätzung bei nichtlinearen Systemen	50
3.4 Maximum-Likelihood-Schätzung	51
3.5 Schätzung von Korrekturparametern der Steifigkeitsmatrix bei gemessenen Eigenfrequenzen	54
4 Schätzung und Anpassung von Systemparametern mit Hilfe von Beobachtern	61
4.1 Zur Anpassung der Eigenfrequenzen mit Beobachtern	61
4.2 Allgemeines	62
4.3 Indirekte Verbesserung des Rechenmodells	63
4.3.1 Herleitung der Gleichungen für die Anpassung von Eigenfrequenzen und Dämpfung	63
4.3.2 Verbesserung des Rechenmodells durch Anpassung an die verbes- serten Eigenfrequenzen und Dämpfungen	70

4.4 Herleitung der Gleichungen für die direkte Anpassung von Korrekturparametern	74
4.5 Spezielle Eigenschaften eines Beobachters für Zustandsschätzung und Parameteranpassung	76
4.6 Zur Wahl des Gütekriteriums und der Wichtungsmatrix	77
4.6.1 Indirekte Parameteranpassung mit dem Beobachter	77
4.6.2 Direkte Anpassung der Systemparameter	79
4.7 Bestimmung von Verstärkungsfaktoren des Eingangssignals mit Hilfe des Beobachtungsfehlers	80
4.8 Bestimmung von Unwuchten mit Hilfe des Beobachtungsfehlers von Biegeschwingungen	81
4.9 Bestimmung einer konstanten Verschiebung des Eingangssignals	86
4.10 Gleichzeitige Schätzung des Systemzustandes und unbekannter Parameter mit Hilfe des erweiterten Kalman Filters	87
5 Untersuchung der Störempfindlichkeit der Parameteranpassung mit Hilfe von Simulationsrechnungen	99
5.1 Allgemeines	96
5.2 Störung durch weißes Rauschen auf dem Meßsignal	98
5.3 Störung des Systems durch weißes Rauschen	99
6 Versuche mit dem Balkenversuchsstand	100
6.1 Allgemeines zur Versuchsdurchführung	100
6.2 Aufbau und Modellierung des Balkenversuchsstandes	100
6.3 Anpassung des Rechenmodells an direkt gemessene Eigenfrequenzen	104
6.3.1 Allgemeines zur Messung und Anpassung der Eigenfrequenzen	104
6.3.2 Anpassung jedes einzelnen Balkenelementes	106
6.3.3 Anpassung größerer Substrukturen an die gemessenen Eigenfrequenzen	108
6.4 Beobachterentwurf für den einseitig eingespannten Balken	110
6.5 Lokalisierung einer Beschädigung des Balkens mit Hilfe eines Beobachters für freie Balkenschwingungen	114
6.5.1 Indirekte Anpassung der Korrekturparameter der Steifigkeitsmatrix	114
6.5.2 Direkte Anpassung der Balkenparameter	121
6.6 Anpassung des Balkenparameters bei wegerregten Schwingungen	124
6.6.1 Modellierung der Dämpfungsmatrix und der Wegerregung	124
6.6.2 Abschätzung der unbekannt Systemeingänge	125
6.6.3 Bestimmung des Verstärkungsfaktors des Eingangssignals	126
6.6.4 Beobachtung und indirekte Anpassung der Steifigkeitsmatrix des Balkens	128

7 Versuch mit rotierender Torsionswelle	1 33
7.1 Allgemeines	1 33
7.2 Meßwerterfassung	1 34
7.3 Modellierung der Torsionswelle	1 38
7.4 Messung von Eigenfrequenzen und Dämpfungen aus freien Torsions- schwingungen	1 38
7.5 Aufbereitung des Eingangssignals über eine Minimierung des Beobachtungsfehlers	1 40
7.6 Beobachter und Anpassung der Steifigkeitsmatrix für den Versuchsaufbau mit der Plexiglaswelle	1 42
7.7 Beobachter und Schadenserkennung für den Versuchsaufbau mit der Aluminiumwelle	1 43
8 Erstellung des Rechenmodells eines Turboblocks als Grundlage für den Entwurf eines "modalen Beobachters"	1 48
8.1 Allgemeines	1 48
8.2 Erstellen des Rechenmodells für den 150 MW Turboblock	1 49
8.3 Messung und Bestimmung der Resonanzfrequenzen	1 51
8.4 Anpassung des Rechenmodells an die Meßwerte	1 52
8.5 Modellierung und Identifikation des 740 MW Turbosatzes	1 53
8.6 Einige Schlußfolgerungen für die Systemidentifikation mit Korrekturparametern	1 58
9 Zusammenfassung und Ausblick	1 60
A1 Das Verwendete Verfahren zur direkten Identifikation modaler Systemparameter	1 62
A1.1 Allgemeines zur Identifikation	1 62
A1.2 Die Identifikation modaler Schwingungsparameter	1 63
Literaturverzeichnis	1 75

1. Einleitung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit dem Einsatz von Zustandsbeobachtern zur Überwachung des Schwingungsverhaltens größerer mechanischer, resonanzfähiger Strukturen. Beispiele für die betrachteten Systeme sind aus dem Bereich des Maschinenbaus der Läufer eines Turbosatzes und Rohrleitungen oder aus dem Bereich des Bauingenieurwesens Brücken, Schornsteine und Türme. Weiterhin wird gezeigt, wie die Beobachtung des Schwingungsverhaltens für eine Schadensfrüherkennung genutzt werden kann.

Die Methode der Zustandsbeobachter wurde von D. C. Luenberger 1963 erstmals vorgestellt und ist in der Regelungstechnik weit verbreitet. Sie ermöglicht es, für ein System, dessen Zustandsgrößen nur an wenigen zugänglichen Punkten gemessen werden, mit Hilfe eines mathematischen Modells und der Meßwerte den vollständigen Systemzustand zu schätzen. Zustandsbeobachter werden vorwiegend zum Entwurf optimaler Regelungen eingesetzt. Die dabei üblicherweise betrachteten Systeme lassen sich durch Rechenmodelle mit einer geringen Anzahl von Freiheitsgraden beschreiben, deren Zustandsgrößen sich häufig nur langsam verändern (z.B. verfahrenstechnische Prozesse).

In der Mechanik interessiert eine andere Fragestellung. Normalerweise ist die Messung aller signifikanten Stellen einer Struktur nicht möglich, bedingt durch die Unzugänglichkeit im Inneren von Maschinengehäusen oder die kostenintensive vollständige Instrumentierung mit Meßwertaufnehmern. Meist ist es nur möglich, die Schwingungen von Maschinen an wenigen ausgezeichneten Punkten, z.B. an Wellenenden, Lagern u.s.w., zu messen. Die Aufgabe des Beobachters besteht jetzt darin, mit den wenigen Meßpunkten alle Zustandsgrößen des Systems zu rekonstruieren. Das bedeutet für die betrachteten mechanischen Strukturen, die sich durch Finite-Element-Modelle beschreiben lassen, daß die Auslenkungen und Geschwindigkeiten an allen Knotenpunkten zu schätzen sind. Bei den in dieser Arbeit ausschließlich betrachteten Identitätsbeobachtern wird mit Hilfe des Rechenmodells der vollständige Schwingungszustand simuliert und mit den Meßwerten wird diese Simulationsrechnung ständig an die Wirklichkeit angepaßt.

Im Gegensatz zur Regelungstechnik erhält man in der Strukturmechanik normalerweise Rechenmodelle mit vielen Freiheitsgraden und schnell veränderlichen Zustandsgrößen; eine ungünstige Kombination, da für die Schwingungsüberwachung Echtzeitrechnungen benötigt werden. Die Anzahl der Freiheitsgrade läßt sich durch den Einsatz "modaler Beobachter" erheblich reduzieren, denn diese berücksichtigen nur die relevanten Eigenschwingungen bei der Simulationsrechnung.

Aus dem Vergleich zwischen den Meßwerten und den entsprechenden rechnerisch erzeugten Zustandsgrößen läßt sich ein Beobachtungsfehler bestimmen, aus dem Informationen über das reale System zu gewinnen sind. Anhand von Simulationsrechnungen und Laborversuchen wird gezeigt, daß sich Beschädigungen des Systems, d.h. Bauteile mit verringerter Steifigkeit, über eine Minimierung des Beobachtungsfehlers auffinden lassen. Für diese Rechnungen, bei denen eine Optimierung der Systemeigenwerte durchgeführt wird, müssen die entsprechenden Eigenschwingungen angeregt sein.

Die ständige Korrektur der Eigenwerte, d.h. des modal transformierten Rechenmodells, liefert mit diesem Rechenalgorithmus einen adaptiven Beobachter, der sich Veränderungen der Systemeigenschaften anpaßt und zudem eine Überwachung charakteristischer Systemparameter ermöglicht.

Folgende Vorgehensweise erweist sich bei der Anwendung von Beobachtern auf größere resonanzfähige Strukturen als günstig.

- Erstellung eines Rechenmodells mit einer möglichst geringen Anzahl von Freiheitsgraden, die trotzdem das Schwingungsverhalten ausreichend genau wiedergeben
- Identifikation der Eigenwerte und, wenn meßtechnisch erfaßbar, auch der Eigenformen
- Verbesserung des Rechenmodells durch eine Anpassung an die identifizierten Eigenwerte und Eigenformen
- Bestimmung der für den Beobachterentwurf benötigten Meßmatrix und der Eingangsmatrix
- Transformation der Systemgleichungen auf Modalkoordinaten und Reduktion der Freiheitsgrade durch Weglassen vernachlässigbarer Eigenschwingungen
- Entwurf eines Beobachters für die modal transformierten Größen
- Verbesserung der Eingangsmatrix durch eine Minimierung des Beobachtungsfehlers
- Überwachung des Schwingungsverhaltens und evtl. charakteristischer Systemparameter mit dem so optimierten Beobachter

Die Durchführung der ersten drei Punkte ist notwendig, da besonders bei Beobachtern, deren Anzahl der Freiheitsgrade mit Hilfe modaler Verfahren reduziert wird, die Eigenfrequenzen, Dämpfungen und die Eigenformen des Rechenmodells möglichst gut mit denen des realen Systems übereinstimmen sollten. Ein ebenso gutes Ausgangsmodell erfordert die Schadensfrüherkennung mit einem Beobachter. Auf Einzelheiten zu diesen Punkten wird im Zusammenhang mit den Laborversuchen (Abschnitte 6 und 7) und der Erstellung eines Rechenmodells für einen Turboblöck (Abschnitt 8) eingegangen.

In Abschnitt 2 wird zunächst beschrieben, wie ein Beobachter für strukturmechanische Probleme entworfen werden kann, wobei auch auf Unterschiede zwischen dem Beobachterentwurf für die Regelungstechnik und für Aufgaben der Schwingungsüberwachung hingewiesen wird. Ein allgemein gültiges Rezept für den Entwurf eines optimalen Beobachters aufzustellen, ist nicht möglich, da die Anforderungen, die an einen Beobachter gestellt werden können, zu vielfältig sind (z.B. Robustheit gegenüber Störungen oder Parameterfehlern, schnelle oder langsame Reaktionen auf Störungen). Deshalb werden die allgemeinen Eigenschaften von Beobachtern dargestellt und wird erläutert, wie nach Reduktion der Freiheitsgrade die Verfahren der Regelungstechnik, die zahlreiche Algorithmen

für den Beobachterentwurf bei speziellen Problemstellungen zur Verfügung stellt, auch auf die hier untersuchten Strukturen angewendet werden können. Ein leicht zu programmierendes Beobachterentwurfsverfahren wird beschrieben.

Auf Parameterschätzverfahren, mit denen das Rechenmodell durch eine Anpassung an Meßwerte verbessert werden kann, wird in Abschnitt 3 eingegangen.

In Abschnitt 4 wird erläutert, wie Parameter des Rechenmodells über eine Minimierung des Beobachtungsfehlers an die Meßwerte anzupassen sind. Werden als Parameter Eigenfrequenzen und Dämpfungen gewählt, so läßt sich zuerst das modal transformierte und dann in einem zweiten Schritt das physikalische Rechenmodell verbessern. Parameter wie die Steifigkeitsmatrix lassen sich aber auch direkt optimieren. Weiterhin können als Parameter Verstärkungsfaktoren der Eingangsmatrix oder bei unwuchterregten Schwingungen Betrag und Phase der Unwucht bestimmt werden.

In Abschnitt 5 zeigen Simulationsrechnungen, wie empfindlich die Parameteroptimierung auf Störungen des Systems und des Meßsignals reagiert.

Die Anwendung der beschriebenen Verfahren wird in Abschnitt 6 an freien und erregten Schwingungen eines einseitig eingespannten Balkens erprobt. Eine künstlich angebrachte Beschädigung des Balkens ist durch Minimierung des Beobachtungsfehlers zu lokalisieren.

In Abschnitt 7 sind die entsprechenden Versuche für eine rotierende Welle mit mehreren Schwungscheiben beschrieben, die zu Torsionsschwingungen angeregt wird. Auch hier läßt sich eine Beschädigung, d.h. ein Wellenelement mit verringerter Steifigkeit, auffinden. Ein Versuch mit rotierenden Bauteilen wurde gewählt, um beim Einsatz von Beobachtern an realen Maschinen auftretende Probleme untersuchen zu können.

Die Erstellung eines Rechenmodells für einen Kraftwerksturbosatz, mit dem ein Beobachter entworfen werden kann, ist in Abschnitt 8 beschrieben. Mit den Methoden der Systemidentifikation wird das Rechenmodell so verbessert, daß die berechneten Eigenfrequenzen mit den gemessenen Werten des Turbosatzes übereinstimmen.

Im Anhang ist der verwendete Algorithmus zur direkten Identifikation modaler Schwingungsparameter (Frequenz, Dämpfung, Phase, Amplitude) beschrieben.

2. Beobachterentwurf

2.1 Der Einsatz von Beobachtern zur Überwachung von Schwingungssystemen

Technische Konstruktionen wie Maschinen und Bauwerke sind vielfältigen dynamischen Belastungen ausgesetzt. Um ihre Funktionstüchtigkeit zu gewährleisten, wird angestrebt, den Schwingungs- und Beanspruchungszustand an gefährdeten Stellen zu überwachen. Dies ist einerseits wichtig, um Schäden (wie z. B. Risse in Wellen) frühzeitig zu erkennen, um dann durch geeignete Maßnahmen eine größere Beschädigung der Maschine oder des Bauwerks zu verhindern, andererseits ermöglicht eine solche Schwingungsüberwachung den Übergang von der periodischen, vorbeugenden Maschinenwartung zu einer zustandsabhängigen. Die periodische Wartung hat den Nachteil, daß eine große Anzahl überflüssiger Wartungsarbeiten ausgeführt werden muß, da man den genauen Beanspruchungs- und Verschleißzustand der Maschine nicht kennt. Ist es aber möglich, mit Hilfe der Schwingungsüberwachung Abnutzungen festzustellen und Fehler frühzeitig zu erkennen oder Lebensdauerrechnungen aufgrund der wirklich aufgetretenen Belastungen durchzuführen, so ist eine Wartung entsprechend dem tatsächlichen Maschinenzustand möglich, d.h. die Wartungsintervalle können wesentlich vergrößert werden, ohne die Betriebssicherheit der Maschine zu verringern.

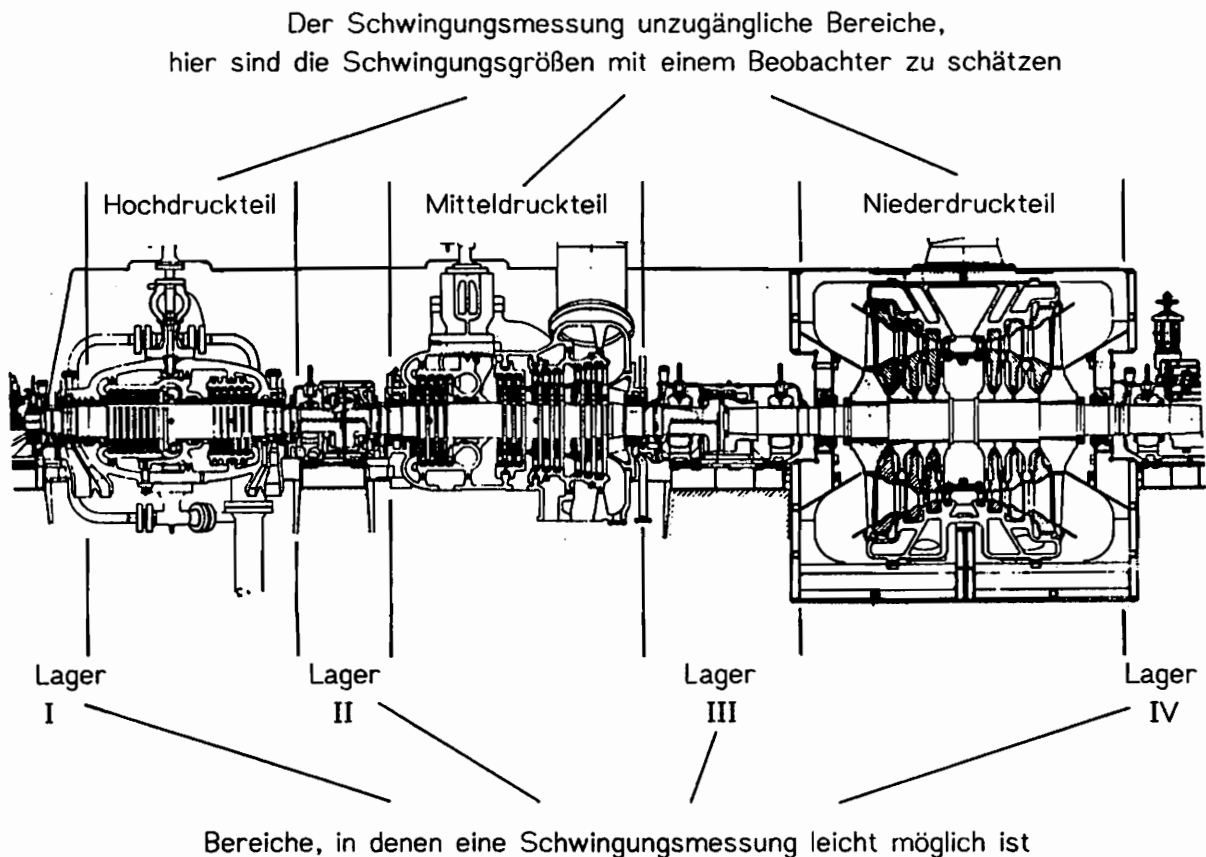


Bild 2.1 Beispiel einer Maschine (Kraftwerksturbine), bei der ein Beobachter sinnvoll einzusetzen ist

Mit der herkömmlichen Meßtechnik ist die Überwachung aber nur an einigen zugänglichen Punkten möglich, die selten mit den Stellen, die am meisten gefährdet sind, übereinstimmen. Abhilfe schaffen können Zustandsbeobachter, die aber bisher in der Strukturmechanik kaum eingesetzt wurden. Die Theorie der Beobachter ist in der Regelungstechnik entwickelt worden und ermöglicht es, aus wenigen oder auch nur einer Meßgröße den physikalischen Gesamtzustand eines Schwingungssystems zu rekonstruieren.

2.2 Allgemeines zum Beobachter

Der Zustand eines Schwingungssystems läßt sich in der Regel nicht vollständig aus Messungen bestimmen. Es ist nur ein meist relativ kleiner Teilzustand des Gesamtsystems einer Messung zugänglich. Die Aufgabe eines Beobachters ist darin zu sehen, den Gesamtzustand mit Hilfe eines mathematischen Modells des Systems und der Messungen zu schätzen. Prinzipiell ist auch möglich, den Zeitverlauf aller Zustandsgrößen des Systems aus den Anfangsbedingungen zu berechnen, indem man eine Schwingungssimulation, basierend auf dem Rechenmodell, durchführt und somit Rechnung und Wirklichkeit unabhängig voneinander parallel laufen läßt. Dies setzt voraus, daß sämtliche Eingänge des Systems bekannt sind und Modell und reales System exakt übereinstimmen. Da sich das aber nicht verwirklichen läßt, werden sich mit der Zeit tatsächlicher und rekonstruierter Zustand immer stärker voneinander unterscheiden. Um das zu verhindern, korrigiert der Beobachter ständig den geschätzten Gesamtzustand mit Hilfe des gemessenen Teilzustandes.

Die Schwingungsgleichung eines Mehrmassenschwingers lautet:

$$\mathbf{M} \ddot{\xi}(t) + \mathbf{D} \dot{\xi}(t) + \mathbf{K} \xi(t) = \mathbf{f}(t) \quad (2.1)$$

\mathbf{M}	:	Massenmatrix
\mathbf{D}	:	Dämpfungsmatrix
\mathbf{K}	:	Steifigkeitsmatrix
$\xi(t)$:	Zustandsvektor (nur Weggrößen)
$\mathbf{f}(t)$:	Kraftvektor

Nach Übergang zur Zustandsraumdarstellung erhält die Gleichung (2.1) mit

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix}$$

die Form

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \mathbf{f}(t) \quad (2.2)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t)$$

mit

- A** : Systemmatrix
- B** : Eingangsmatrix
- x(t)** : Zustandsvektor (um Geschwindigkeitsgrößen erweitert)
- u(t)** : Vektor der Eingangsgrößen

Der Zusammenhang zwischen den Größen des Zustandsvektors und den Meßgrößen wird über die Meßmatrix **C** hergestellt. Sie beschreibt, welche Elemente des Zustandsvektors mit welchem Verstärkungsfaktor bzw. welche Linearkombinationen der Zustandsgrößen gemessen werden.

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) \tag{2.3}$$

- y(t)** : Vektor der Meßgrößen
- C** : Meßmatrix

Hierbei soll vorausgesetzt werden, daß alle Komponenten des Ausgangsvektors hinsichtlich ihres zeitlichen Verlaufs linear unabhängig sind, oder anders ausgedrückt, die Zeilen von **C** sollen linear unabhängig sein. Entsprechendes gilt für den Eingang **u(t)**, d. h. die Spalten der Matrix **B** sollen linear unabhängig sein. Somit gilt:

- rang **A** = n
- rang **B** = r ≤ n r : Anzahl der Eingänge
- rang **C** = s ≤ n s : Anzahl der Meßgrößen

Im Sonderfall s = n läßt sich der Zustand **x(t)** vollständig aus Messungen bestimmen, so daß ein Beobachter überflüssig ist.

Im weiteren soll nur der Identitätsbeobachter dargestellt werden, ein Sonderfall des allgemeinen Luenbergerschen Konzepts (/1/ bis /3/). Weitere allgemeine Betrachtungen zum Beobachterentwurf sind in /4/ bis /6/ zu finden. Es ist auch möglich, sogenannte reduzierte Beobachter zu entwerfen, indem die gemessenen Zustandsgrößen als bekannt vorausgesetzt und nur die restlichen unbekanntenen Größen geschätzt werden. Man erhält so einen Beobachter geringerer Ordnung. Es hat sich aber nicht als sinnvoll erwiesen, solche Beobachter für Überwachungsaufgaben zu verwenden, da einerseits so eine Glättung eventueller Meßstörungen nicht möglich ist, und da andererseits die Redundanz von geschätzten und gemessenen Zustandsgrößen an den Meßstellen zur Kontrolle der Güte des Beobachters und zur Schadensfrüherkennung genutzt werden kann. Die Gleichung des Beobachters wird folgendermaßen angesetzt:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{F} \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{H} \mathbf{y}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \tag{2.4}$$

- ($\hat{}$) : beobachtete Zustandsgrößen
- F** : n x n Beobachtermatrix
- H** : n x s Beobachtereingangsmatrix

Der Beobachtungsfehler berechnet sich nach

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) &= \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) - \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F} \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{H} \mathbf{y}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) - \mathbf{A} \mathbf{x}(t) - \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \\ &= \mathbf{F} \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{H} \mathbf{C} \mathbf{x}(t) - \mathbf{A} \mathbf{x}(t) \end{aligned} \tag{2.5}$$

- $\tilde{\mathbf{x}}(t)$: Beobachtungsfehler

Einen asymptotisch abklingenden Beobachtungsfehler erhält man, wenn gilt

$$F = A - H C \quad (2.6)$$

und die Eigenwerte von F negativen Realteil haben. Damit ergibt sich für das dynamische Verhalten des Beobachtungsfehlers die Differentialgleichung

$$\dot{\tilde{x}}(t) = F (\hat{x}(t) - x(t)) = F \tilde{x}(t) \quad (2.7)$$

und den Zeitverlauf

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x} e^{F t} ,$$

der angibt, wie schnell ein Beobachtungsfehler \tilde{x}_0 abklingt. Durch die Matrix F läßt sich also die Dynamik festlegen, mit der der Beobachter auf Fehler reagiert. Unter Berücksichtigung der Gleichung 2.6 läßt sich Gleichung 2.4 noch auf eine andere Art schreiben, die die Arbeitsweise eines Beobachters sehr deutlich macht.

$$\dot{\hat{x}}(t) = \underbrace{A \hat{x}(t) + B u(t)}_{\text{Modell der Strecke}} + \underbrace{H (y(t) - C \hat{x}(t))}_{\text{Korrekturglied}} \quad (2.8)$$

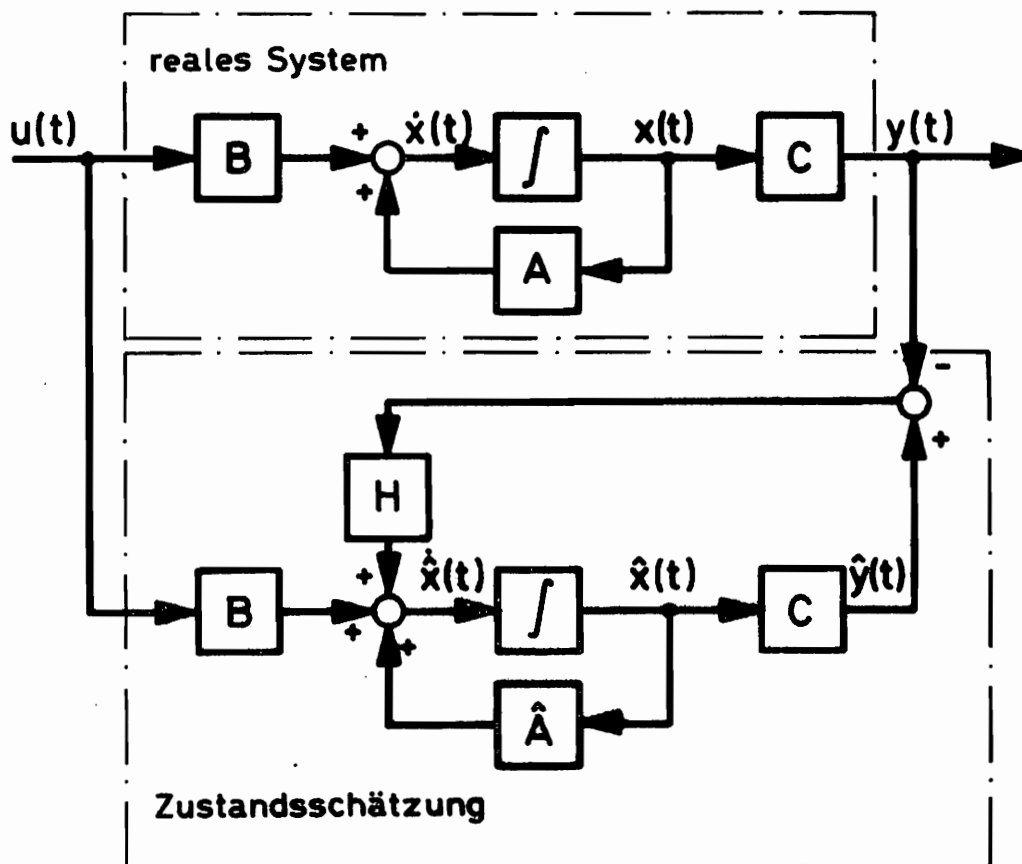


Bild 2.3 Identitätsbeobachter

Zur Bestimmung der Elemente der Beobachtermatrizen F und H stehen n^2 Gleichungen (Gl. 2.6) zur Verfügung, während man $n(n+s)$ Unbekannte hat. Die überzähligen Freiheitsgrade können genutzt werden, um dem Beobachter bestimmte Eigenschaften zu geben.

2.3 Unterschiede zwischen dem Beobachterentwurf in der Regelungstechnik und in der Strukturdynamik

Die Beobachtertheorie ist für regelungstechnische Aufgaben entwickelt worden, die wesentlich andere Anforderungen an einen Beobachter stellen, als die Bereiche Schwingungsüberwachung und Schadensfrüherkennung. Um beurteilen zu können, welche Entwurfsverfahren hier noch anwendbar sind und wie sie modifiziert werden müssen, ist es notwendig, die grundsätzlichen Unterschiede zu kennen. Sie sollen im folgenden dargestellt werden:

Während in der Regelungstechnik die Anzahl der Freiheitsgrade meist gering ist, erhält man in der Strukturdynamik, bedingt durch die komplexen Strukturen und deren Beschreibung mit Finite-Element-Modellen, eine große Anzahl von Freiheitsgraden. Die zahlreichen Verfahren für die häufig verwendeten single-input/single-output Modelle sind hier i. a. nicht anwendbar. Schwierigkeiten machen aber auch Verfahren für multi-input / multi-output Modelle, wenn sie auf Systeme mit sehr vielen Freiheitsgraden angewendet werden (Rechenzeit, Stabilität, Konvergenzgeschwindigkeit). Aus diesem Grund stellt sich die Aufgabe, die Anzahl der Freiheitsgrade zur Beschreibung des mechanischen Modells möglichst gering zu halten, andererseits aber das Schwingungsverhalten des Systems hinreichend genau wiederzugeben. Mit dem in Abschnitt 3.5 beschriebenen Verfahren zur Anpassung der Systemparameter an gemessene Eigenwerte und evtl. gemessene Eigenformen lassen sich brauchbare mathematische Modelle mit relativ wenig Freiheitsgraden finden. Die größte Reduktion der Beobachterfreiheitsgrade aber wird durch den Übergang zum "modalen Beobachter" (s. Abschnitt 2.7) erreicht.

Bei der Regelungstechnik wird der Beobachter benutzt, um den geschätzten Endzustand über eine Regelmatrix zum Eingang zurückzuführen, so daß man einen geschlossenen Regelkreis erhält, während bei der Schwingungsüberwachung der Kreis offen ist. Aus diesem Grund lassen sich viele Entwurfsverfahren auch nicht direkt anwenden, da sie den optimalen Beobachter gemeinsam mit der optimalen Zustandsrückführung entwerfen.

Dadurch, daß sich die Eingänge aus beobachteten Zustandsgrößen berechnen lassen, ist so die inhomogene Beobachtergleichung in eine homogene zu überführen, was bei offenen Kreisen nicht möglich ist.

2.4 Der Übergang vom kontinuierlichen zum zeitdiskreten System

Damit der Beobachter auf einem Digitalrechner, der keine kontinuierlichen Größen bearbeitet, realisiert werden kann, muß der Übergang vom kontinuierlichen zum zeitdiskretisierten System durchgeführt werden. Dies kann mit Hilfe von Übertragungsmatrizen für einen Zeitschritt Δt geschehen. Die allgemeine Zeitlösung der Differentialgleichung des Systems lautet:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}_{\text{kont}}(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \int_{\tau=t_0}^t e^{\mathbf{A}_{\text{kont}}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau . \quad (2.9)$$

Betrachtet man nun das Intervall

$$k \Delta t \leq t \leq (k+1) \Delta t \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Δt : Abtastintervall

und nähert die Erregung $\mathbf{u}(t)$ durch eine Treppenfunktion an,

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{u}(k \cdot \Delta t) \quad \text{für} \quad k \Delta t \leq t \leq (k+1) \Delta t$$

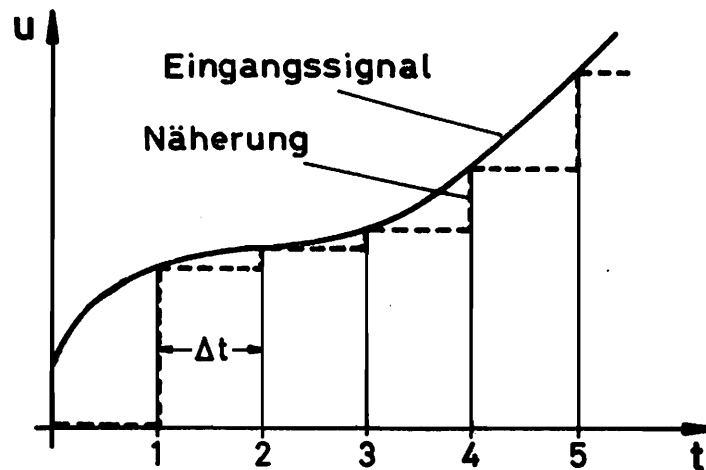


Bild 2.3 Näherung für $\mathbf{u}(t)$

so lautet die Lösung für $\mathbf{x}((k+1) \cdot \Delta t) = \mathbf{x}_{k+1}$:

$$\mathbf{x}_{k+1} = e^{\mathbf{A}_{\text{kont}}((k+1)\Delta t - k \cdot \Delta t)} \mathbf{x}(k \cdot \Delta t) + \int_{\tau=k \cdot \Delta t}^{(k+1)\Delta t} e^{\mathbf{A}_{\text{kont}}((k+1)\Delta t - \tau)} \mathbf{B}_{\text{kont}} d\tau \mathbf{u}(k \cdot \Delta t) .$$

Mit der Substitution $v = \tau - k \cdot \Delta t$ ist $d\tau = dv$ und man erhält

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= e^{\mathbf{A}_{\text{kont}} \Delta t} \mathbf{x}_k + \int_{v=0}^{\Delta t} e^{\mathbf{A}_{\text{kont}}(\Delta t - v)} \mathbf{B}_{\text{kont}} dv \mathbf{u}_k \\ &= \mathbf{A}_{\text{dis}} \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_{\text{dis}} \mathbf{u}_k , \end{aligned}$$

mit

$$\mathbf{A}_{\text{dis}} = e^{\mathbf{A}_{\text{kont}} \Delta t} \quad (2.10)$$

und

$$\mathbf{B}_{\text{dis}} = \int_{v=0}^{\Delta t} e^{\mathbf{A}_{\text{kont}}(\Delta t-v)} \mathbf{B}_{\text{kont}} dv \quad (2.11)$$

Rein formal, d.h. ohne auf die physikalische Übereinstimmung der zugeordneten Größen zu achten, kann der Übergang vom kontinuierlichen zu dem zeitdiskreten System durchgeführt werden, indem man folgende Größen ersetzt:

kontinuierlich	diskret
$\mathbf{x}(t)$	\mathbf{x}_k
$\hat{\mathbf{x}}(t)$	$\hat{\mathbf{x}}_k$
$\dot{\mathbf{x}}(t)$	\mathbf{x}_{k+1}
$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t)$	$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$
$\mathbf{u}(t)$	\mathbf{u}_k
\mathbf{A}_{kont}	\mathbf{A}_{dis}
\mathbf{B}_{kont}	\mathbf{B}_{dis}

Tabelle 2.1 Übergang vom kontinuierlichen zum zeitdiskreten System

Die für das kontinuierliche System geltenden Gleichungen des Beobachters sind auch mit den transformierten Größen noch gültig.

Mit den Systemgleichungen

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_{\text{dis}} \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_{\text{dis}} \mathbf{u}_k$$

und

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C} \mathbf{x}_k$$

\mathbf{y}_k : zeitdiskrete Meßwerte

hat der Beobachter jetzt die Form:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{F}_{\text{dis}} \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{H}_{\text{dis}} \mathbf{y}_k + \mathbf{B}_{\text{dis}} \mathbf{u}_k \quad .$$

Für das Abklingen des Beobachterfehlers gilt jetzt:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1} - \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_{\text{dis}} \tilde{\mathbf{x}}_k \quad (2.12)$$

$$\mathbf{F}_{\text{dis}} = \mathbf{A}_{\text{dis}} - \mathbf{H}_{\text{dis}} \mathbf{C} \quad (2.13)$$

Es ist zu sehen, daß ein Fehler nur abklingt, wenn alle Eigenwerte von \mathbf{F}_{dis} vom Betrag her kleiner als 1 sind. Um einen stabilen Beobachter zu erhalten, sollten sie auch kleiner sein als die Eigenwerte von \mathbf{A}_{dis} . Die Meßmatrix \mathbf{C} ändert sich nicht. Diese einfachen Beziehungen sind nur möglich, wenn $u(t)$ durch eine Treppenfunktion angenähert wird. Im Einzelfall, z. B. bei relativ großen Abtastintervallen Δt , kann das eine nicht unerhebliche Beeinträchtigung der Genauigkeit bedeuten. Schon wenn man die Erregung durch Geradenstücke annähert, ist der einfache Übergang zum diskreten System nach Tabelle 2.1 nicht mehr möglich ///. Bei der Erregung muß dann neben $u(k \cdot \Delta t)$ auch $u((k+1) \cdot \Delta t)$ in die Systemgleichung aufgenommen werden.

Die Übertragungsmatrizen für einen Zeitschritt \mathbf{A}_{dis} und \mathbf{B}_{dis} können mit der Taylorreihenentwicklung nach den Gleichungen

$$\mathbf{A}_{\text{dis}} = e^{\mathbf{A}_{\text{kont}} \Delta t} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}_{\text{kont}} \Delta t)^l}{l!} = \mathbf{I} + \mathbf{A}_{\text{kont}} \mathbf{R} \quad (2.14)$$

mit

$$\mathbf{R} = \Delta t \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}_{\text{kont}} \Delta t)^l}{(l+1)!}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\text{dis}} &= \int_{v=0}^{\Delta t} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}_{\text{kont}} v)^l}{l!} \right) \mathbf{B}_{\text{kont}} dv \\ &= \Delta t \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}_{\text{kont}} \Delta t)^l}{(l+1)!} \mathbf{B}_{\text{kont}} = \mathbf{R} \mathbf{B}_{\text{kont}} \end{aligned} \quad (2.15)$$

berechnet werden. Für größere Systeme (viele Freiheitsgrade) erhält man durch die vielen Matrizenmultiplikationen numerische Ungenauigkeiten, die oft nicht mehr zu vernachlässigen sind. Genauere Ergebnisse sind mit folgender Vorgehensweise zu erzielen:

1. Bestimmung der komplexen Eigenwerte $\delta_i + j \omega_i$ und der komplexen Eigenvektoren $\varphi_{\text{Re},i} + j \varphi_{\text{Im},i}$, bzw. der modifizierten Modalmatrix

$$\Phi_{\text{mod}} = \left| \varphi_{\text{Re},1}, \varphi_{\text{Im},1}, \dots, \varphi_{\text{Re},N/2}, \varphi_{\text{Im},N/2} \right|$$

2. Bestimmung der Übertragungsmatrizen $\mathbf{B}_{\text{dis}}^*$ und \mathbf{A}_{dis} für das modal transformierte System (siehe Abschnitt 2.7.4 Gl. 2.53 und 2.54)

3. Rücktransformation:

$$\mathbf{A}_{\text{dis}} = \Phi_{\text{mod}} \mathbf{A}_{\text{dis}} \Phi_{\text{mod}}^{-1} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{B}_{\text{dis}} = \Phi_{\text{mod}} \mathbf{B}_{\text{dis}}^* \quad (2.17)$$

Einzelheiten zu dieser Art der Bestimmung der Systemmatrizen für die zeitdiskrete Rechnung über die modaltransformierten Systemgleichungen sind im Abschnitt 2.7 zu finden. Sofern Verwechslungen ausgeschlossen sind bzw. wenn es keinen Unterschied macht, ob man die kontinuierlichen oder die zeitdiskreten Größen benutzt, wurden die Indizes (dis und kont) weggelassen.

Eine bessere Beschreibung des Eingangssignals $u(t)$, z.B. durch Polynome, die durch die Punkte u_{k+1} , u_k und zurückliegende Werte u_{k-1} , ... gelegt werden, bringt keine Schwierigkeiten für den Entwurf von Identitätsbeobachtern mit sich, da das Eingangssignal und die Beobachtereingangsmatrix nur bei der Schwingungssimulation, nicht aber bei deren Korrektur mit Hilfe der Beobachtermatrizen F und H berücksichtigt werden (siehe Gleichung 2.8). Auch für die Beobachterentwurfsverfahren wird die Eingangsmatrix B nicht benötigt. Ein besseres Rechenmodell für die Eingangsgrößen des Systems läßt sich beim Einsatz von Beobachtern somit problemlos realisieren.

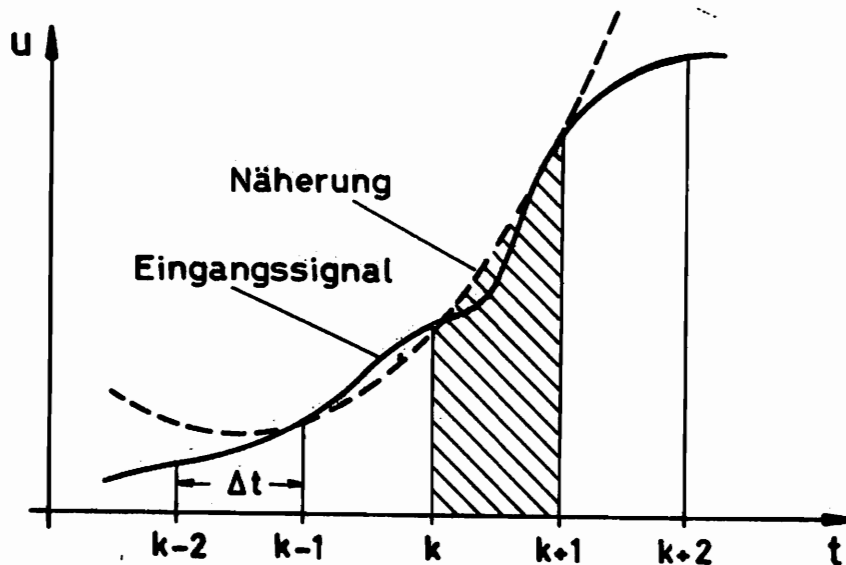


Bild 2.4 Näherung für $u(t)$ im Bereich $k \Delta t < t < (k+1) \Delta t$

Es ist so vorzugehen, daß für jeden Zeitschritt und für jedes Eingangssignal die Koeffizienten des Polynoms zu bestimmen sind, die dann in das Integral

$$\int_{v=0}^{\Delta t} e^{\mathbf{A}_{\text{kont}}(\Delta t-v)} \mathbf{B}_{\text{kont}} u(v) dv \quad (2.18)$$

eingesetzt werden. Die Systemgleichung erhält dann die Form

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_{\text{dis}} \mathbf{x}_k + \sum_{i=0}^1 \mathbf{X}_i \mathbf{B} u_{k+1-i} \quad (2.19)$$

wobei sich die Elemente von \mathbf{X}_i aus dem Integral ergeben (Einzelheiten siehe /8/). Am Beispiel der Näherung eines Eingangssignals durch quadratische Polynome soll diese Vorgehensweise nun erläutert werden:

Mit dem Ansatz für $u(t)$ bzw. $u(v)$:

$$u(v) = a_2 v^2 + a_1 v + a_0$$

berechnen sich die Koeffizienten a_0 , a_1 , a_2 mit $u_{k-1}(v=-\Delta t)$, $u_k(v=0)$ und $u_{k+1}(v=\Delta t)$ nach

$$\begin{bmatrix} a_{0,k} \\ a_{1,k} \\ a_{2,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/(2 \cdot \Delta t) & 0 & -1/(2 \cdot \Delta t) \\ 1/(2 \cdot \Delta t^2) & -1/\Delta t^2 & 1/(2 \cdot \Delta t^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{k-1} \\ u_k \\ u_{k+1} \end{bmatrix} .$$

Es ist nun noch das Integral

$$\begin{aligned} & \int_{v=0}^{\Delta t} e^{\mathbf{A}_{\text{kont}}(\Delta t-v)} \mathbf{B}_{\text{kont}} (a_2 v^2 + a_1 v + a_0) dv \\ &= e^{\mathbf{A}_{\text{kont}} \Delta t} \left\{ a_{2,k} \int_0^{\Delta t} e^{-\mathbf{A}_{\text{kont}} v} v^2 dv + a_{1,k} \int_0^{\Delta t} e^{-\mathbf{A}_{\text{kont}} v} v dv \right. \\ & \quad \left. + a_{0,k} \int_0^{\Delta t} e^{-\mathbf{A}_{\text{kont}} v} dv \right\} \mathbf{B}_{\text{kont}} \end{aligned}$$

zu berechnen. Diese bessere Beschreibung des Eingangssignals benötigt allerdings eine wesentlich größere Rechenzeit.

2.5 Beobachtbarkeit

Bevor man nun mit dem eigentlichen Beobachterentwurf beginnen kann, ist noch zu klären, ob das System von den Meßgrößen \mathbf{y} beobachtbar ist, oder umgekehrt, wo die Meßgeber am günstigsten angebracht werden und wieviele benötigt werden, um die gewünschte Genauigkeit bei der Beobachtung zu gewährleisten (s. /9/ und /10/). Ein System heißt beobachtbar, wenn jeder beliebige Zustand des Systems alleine mit Hilfe der Meßwerte bestimmt werden kann. Man muß hier zwischen der theoretischen und der praktischen Beobachtbarkeit unterscheiden. Es kann vorkommen daß ein System oder bestimmte Eigenschwingungen des Systems praktisch nicht beobachtbar sind, obwohl die theoretischen Überlegungen das Gegenteil zeigen. Es werden in diesem Fall nicht erfüllbare Anforderungen an die Meßinstrumente gestellt.

Zunächst soll dargestellt werden, wann ein System nach theoretischen Überlegungen von den Meßgrößen \mathbf{y} beobachtbar ist. Diese Überlegungen lassen sich am anschaulichsten für diskrete Beobachter durchführen. Sie gelten aber auch für kontinuierliche Systeme, wenn die Größen nach Tabelle 2.1 ersetzt werden.

Setzt man die Systemgleichung (Gl. 2.2)

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{B} \mathbf{u}_k$$

in die Meßgleichung (Gl. 2.3) ein, so ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C} \mathbf{x}_k \quad (2.20)$$

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{C} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{u}_k$$

⋮

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{k+N-1} = \mathbf{C} \mathbf{x}_{k+N-1} &= \mathbf{C} \mathbf{A}^{N-1} \mathbf{x}_k + \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{u}_{k+N-2} \\ &+ \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{u}_{k+N-3} + \dots + \mathbf{C} \mathbf{A}^{N-2} \mathbf{B} \mathbf{u}_k \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem in Matrizenform zusammengefaßt ergibt:

$$\mathbf{y}_{\text{ges}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C} \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^{N-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}_B} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{C} \mathbf{B} & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^{N-2} \mathbf{B} & \dots & \mathbf{C} \mathbf{B} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}_{\text{ges}}$$

$$\mathbf{y}_{\text{ges}} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_k \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{k+N-1} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{u}_{\text{ges}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{k+N-1} \end{bmatrix}$$

Mit dieser Gleichung läßt sich der Vektor der Zustandsgröße \mathbf{x}_k nur bestimmen, wenn die Matrix \mathbf{Q}_B n linear unabhängige Zeilen enthält. Es kann gezeigt werden, daß, wenn die Gleichung nach \mathbf{x}_k aufgelöst werden kann, N im Bereich

$$\frac{n}{s} \leq N \leq n \quad (2.21)$$

n : Anzahl der Zustandsgrößen
s : Anzahl der Meßgrößen

liegt. Die Bedingung für die Beobachtbarkeit eines Systems läßt sich somit auch schreiben als

$$\text{rang} (\mathbf{Q}_B) = \text{rang} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C} \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^{N-1} \end{bmatrix} = n \quad , \quad N \leq n \quad (2.22)$$

Der kleinste Wert N, für den diese Gleichung erfüllt wird, heißt der Beobachtbarkeitsindex ν . Er gibt u. a. an, daß man höchstens ($\nu - 1$) zurückliegende Messungen benötigt,

um einen beliebigen Zustand bestimmen zu können oder, bei kontinuierlichen Systemen, alle zeitlichen Ableitungen bis zur $(v-1)$ -ten Ordnung.

Die Rangbestimmung kann beispielsweise mit der Gram-Schmidt Orthogonalisierung durchgeführt werden.

Die Beobachtbarkeitsbedingung (Gl. 2.22) ist für ein mechanisches System, bei dem keine entkoppelten Teilsysteme auftreten, immer erfüllt. Untersuchungen über die praktische Beobachtbarkeit hat Wilharm (/10/) durchgeführt. Dort ist eine Beobachtbarkeitsmatrix \mathbf{B} definiert, die angibt, wie stark sich die einzelnen Eigenschwingungen des Systems in den Meßgrößen bemerkbar machen. Anschaulich ist sofort einzusehen, daß Eigenschwingungen, die in der Nähe einer Meßstelle Schwingungsknoten aufweisen, von dort sehr schlecht zu beobachten sind, während Schwingungsbäuche in der Nähe der Meßstelle günstig sind. Die Elemente der Beobachtbarkeitsmatrix sind folgendermaßen definiert:

$$B_{ij} = \frac{\text{Amplitude der } i\text{-ten Eigenschwingung in der Ausgangsgröße } y_j}{\text{Maximalamplitude der } i\text{-ten Eigenfrequenz}}$$

Eine Zeile von \mathbf{B} ergibt sich auch aus

$$\mathbf{B}_i^T = \mathbf{C} \Phi_i \Phi_{i_{\max}}^{-1} \quad (2.23)$$

- Φ_i : Eigenvektor der i -ten Eigenschwingung
- $\Phi_{i_{\max}}$: betragsmäßig größter Wert von Φ_i

Aus der Matrix \mathbf{B} läßt sich, besonders wenn zusätzlich abgeschätzt wird, wie stark die einzelnen Eigenschwingungen angeregt werden, sehr gut ersehen, welche Eigenschwingungen von welchen Meßgrößen gut bzw. schlecht beobachtet werden können und welche Anforderungen an die Meßgeber gestellt werden müssen, um bestimmte Eigenschwingungen beobachten zu können. Besonders im Zusammenhang mit der in Abschnitt 2.7 beschriebenen Modalanalyse und dem "modalen Beobachter" ist die Beobachtbarkeitsmatrix ein gutes Hilfsmittel, um Aussagen über die praktische Beobachtbarkeit eines Systems zu treffen. Abhilfe bei einer schlechten praktischen Beobachtbarkeit (z.B. kleine Wert B_{ij} in einer ganzen Zeile) ist dadurch zu schaffen, daß man andere Ausgangsgrößen wählt oder neue Meßgrößen hinzunimmt.

An dieser Stelle soll, wegen der Verwandtschaft der Gleichungen, noch kurz auf das Problem der Steuerbarkeit eines Systems eingegangen werden. Ein System wird steuerbar genannt, wenn jeder beliebige Zustandsvektor bei geeigneter Wahl der Eingangsgrößen erreicht werden kann. Die Bedingung für die Steuerbarkeit eines Systems lautet:

$$\text{rang} \left[\mathbf{A}^{N-1} \mathbf{B}, \mathbf{A}^{N-2} \mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^0 \mathbf{B} \right] = n \quad (2.26)$$

$$\frac{n}{s} \leq N \leq n$$

Die Steuerbarkeit ist vorwiegend für den Entwurf geschlossener Regelkreise wichtig. Sie kann aber auch für Vorüberlegungen zu Versuchen zur Systemidentifikation von Bedeutung sein, z.B. bei der Frage, wo das System am besten erregt werden soll, um alle gewünschten Eigenschwingungen anregen zu können, oder bei Betrachtungen, welchen Einfluß unbekannte Erregungen einzelner Systemfreiheitsgrade auf das Meßergebnis haben können.

Ein Maß für die praktische Steuerbarkeit gibt die dreidimensionale Steuerbarkeitsmatrix Γ . Γ_{ijk} ist die Amplitude der i -ten Eigenschwingung, an der Meßstelle j , wenn das System durch einen Einheitssprung der k -ten Eingangsgröße angeregt wird. Die Werte von Γ_{ijk} lassen sich beispielsweise durch Simulationsrechnungen bestimmen.

2.6 Verfahren zum Beobachterentwurf

2.6.1 Zur Auswahl geeigneter Entwurfsverfahren

Der Entwurf eines Beobachters besteht darin, die Beobachtermatrix F und die Beobachtereingangsmatrix H für ein zeitkontinuierliches System mit

$$\dot{\hat{x}}(t) = F_{\text{kont}} \hat{x}(t) + H_{\text{kont}} y(t) + B_{\text{kont}} u(t)$$

bzw für ein zeitdiskretes System mit

$$\hat{x}_{k+1} = F_{\text{dis}} \hat{x}_k + H_{\text{dis}} y_k + B_{\text{dis}} u_k$$

so zu bestimmen, daß der Beobachter bestimmte Eigenschaften erhält, wobei die Bedingung für einen abklingenden Beobachtungsfehler

$$F_{\text{kont}} = A_{\text{kont}} - H_{\text{kont}} C$$

bzw.

$$F_{\text{dis}} = A_{\text{dis}} - H_{\text{dis}} C$$

erfüllt werden muß.

Kalman-Bucy-Filter für zeitkontinuierliche Systeme oder Kalman-Filter für zeitdiskrete Systeme weisen eine ähnliche Struktur auf wie Beobachter und lassen sich auch für Beobachtungsaufgaben einsetzen. Sie sind für Systeme entwickelt worden, bei denen Störungen in Form von weißem Rauschen vorliegen. Allgemeine Betrachtungen zum Beobachterentwurf, die jedoch vorwiegend im Zusammenhang mit optimalen Regelungen behandelt werden, sind in /12/ bis /15/ zu finden

Eigenschaften eines Beobachters bzw. Anforderungen, die an einen Beobachter gestellt werden, können sein:

- Unempfindlichkeit gegenüber Störungen des Systems, d.h. nichtmeßbaren Eingängen, und gegenüber Meßfehlern, wie Meßrauschen (Kalman-Bucy-Filter /9/, /10/, /16/, /17/, bei unbekanntem Eingängen /18/)
- Erfüllung oder Minimierung bestimmter Fehlerkriterien (vom quadratischen Fehlerkriterium /19/ bis zur Tschebyscheff-Approximation, bei der die Maximalwerte des Fehlers minimiert werden)
- Robustheit, wenn das Rechenmodell wegen Modellierungsungenauigkeiten oder Parameterfehlern dem realen System nicht genau entspricht (/20/, /21/)
- Für Systeme mit zeitveränderlichen Systemparametern können Beobachter entworfen werden, bei denen die Matrizen F und H ebenfalls zeitabhängig sind. Hier ist zu unterscheiden, ob der Zeitverlauf der Parameteränderung bekannt ist (in diesem Fall kann z.B. das nachfolgend beschriebene Entwurfsverfahren angewendet werden) oder ob er unbekannt ist, so daß sogenannte adaptive Beobachter verwendet werden müssen (/22/ bis /25/)
- Für nichtlineare Systeme gibt es spezielle Kalman Filter (/26 /)
- Eine gleichzeitige Schätzung des Zustandsvektors und eines Parametervektors ist mit einem erweiterten Kalman Filter (EKF) möglich (/27/ bis /29/)

An den aufgeführten Punkten ist schon zu sehen, wie vielfältig die Anforderungen sind, die an einen Beobachter gestellt werden können. Entsprechend vielfältig sind auch die Entwurfsverfahren, so daß bei einem konkreten Problem gut ausgewählt werden muß. Weiterhin ist zu beachten, daß die meisten Entwurfsverfahren für regelungstechnische Systeme mit sehr wenigen Freiheitsgraden, häufig für single-input, single-output Systeme, entwickelt wurden, so daß man bei Problemen der Strukturmechanik, die in der Regel auf Systeme mit vielen Freiheitsgraden führen, Schwierigkeiten bezüglich der Rechenzeit und der Konvergenz der Verfahren erhält. Dies gilt insbesondere für adaptive Beobachter.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde im wesentlichen mit zwei Entwurfsverfahren gearbeitet. Ein Beobachter ähnlich einem Kalman-Filter liefert gute Ergebnisse, wenn die statistischen Eigenschaften der Störungen bekannt sind. Zum anderen wurde mit einem Beobachter gearbeitet, bei dem die Pole der Beobachtermatrix F vorgegeben werden können. Da diese Pole charakteristisch für das dynamische Verhalten eines Beobachters sind, erhält man so eine relativ anschauliche Möglichkeit, einen guten Beobachter zu entwerfen.

2.6.2 Allgemeine Eigenschaften von Beobachtern

Zunächst einmal soll aber etwas allgemeiner auf die Eigenschaften von Beobachtern eingegangen werden. An dem Zeitverlauf des Abklingens eines Beobachtungsfehlers \tilde{x}_0

$$\tilde{x}(t) = \hat{x}(t) - x(t) = \tilde{x}_0 e^{\mathbf{F}_{\text{kont}} t}$$

bzw.

$$\tilde{x}_k = \hat{x}_k - x_k = \tilde{x}_0 \mathbf{F}_{\text{dis}}^k$$

ist zu ersehen, daß die Eigenwerte der Matrix \mathbf{F} die charakteristischen Größen für das Verhalten eines Beobachters sind. Mit

λ_i : Eigenwerte des zeitkontinuierlichen Beobachters

und

z_i : Eigenwerte des zeitdiskreten Beobachters

lassen sich folgende allgemeine Eigenschaften eines Beobachters auführen:

- $\text{Re}(\lambda_i)$ gegen $-\infty$, bzw. $|z_i|$ nahe 0 (schneller Beobachter):
Beobachtungsfehler werden schnell abgebaut, es tritt aber kurzzeitig ein starkes Überschwingen auf.
- $\text{Re}(\lambda_i) < 0$, aber nahe 0, bzw. $|z_i| < 1$, aber nahe 1 (langsamer Beobachter):
Der Beobachter reagiert sehr langsam auf Störungen, hat aber gute Glättungseigenschaften (kein Überschwingen).
- $\text{Re}(\lambda_i) \geq 0$, $|z_i| \geq 1$: Der Beobachter konvergiert nicht.

Diese allgemeinen Zusammenhänge sollen anhand der in den folgenden Bildern dargestellten Simulationsrechnungen deutlich gemacht werden. Es wurden die Schwingungen eines einseitig eingespannten Balkens simuliert, der an seinem freien Ende eine Wegerregung erfährt. Hierfür wurde ein Beobachter entworfen, wobei der 5. Freiheitsgrad als Meßsignal verwendet wurde. In den Bildern sind jeweils die Zeitfunktionen des 7. Freiheitsgrades der Simulation und des Beobachters für diesen Freiheitsgrad dargestellt.

Es wurden mehrere Arten von Störungen simuliert und gezeigt, wie sie sich auf die Beobachtungsfehler von langsamen und schnellen Beobachtern auswirken. Bei dem Beobachterentwurf wurden die Eigenwerte der Beobachtermatrix \mathbf{F} vorgegeben. Die Eigenwerte der Beobachtermatrix \mathbf{F} des zeitdiskreten Systems (z_i) wurden als Vielfache der Eigenwerte des Systems vorgegeben. Der Faktor ist in den Bildern 2.5 bis 2.13 mit const angegeben.

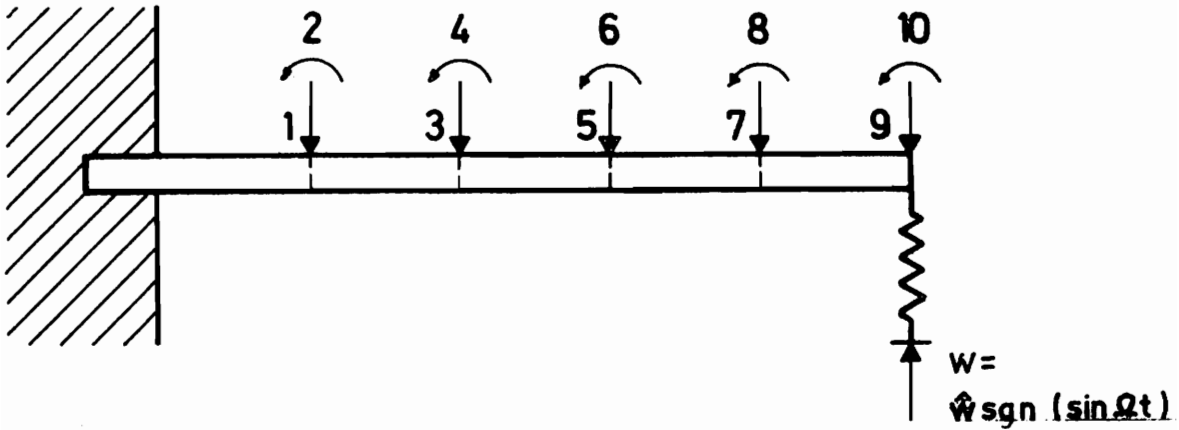


Bild 2.5 Einseitig eingespannter Balken

Einzelimpuls (z. B. Schlag), der auf das System wirkt

In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie sich ein Einzelimpuls (z.B. Schlag) auf die Zustandsschätzung auswirkt, wenn er auf das System wirkt und nicht gemessen wird und somit auch nicht direkt in die Zustandsschätzung des Beobachters eingeht.

durchgezogen : Beobachter
gestrichelt (lange Striche) : Kontrollmessung

7. Freiheitsgrad
Meßzeit : $T = 0.5 \text{ sec}$

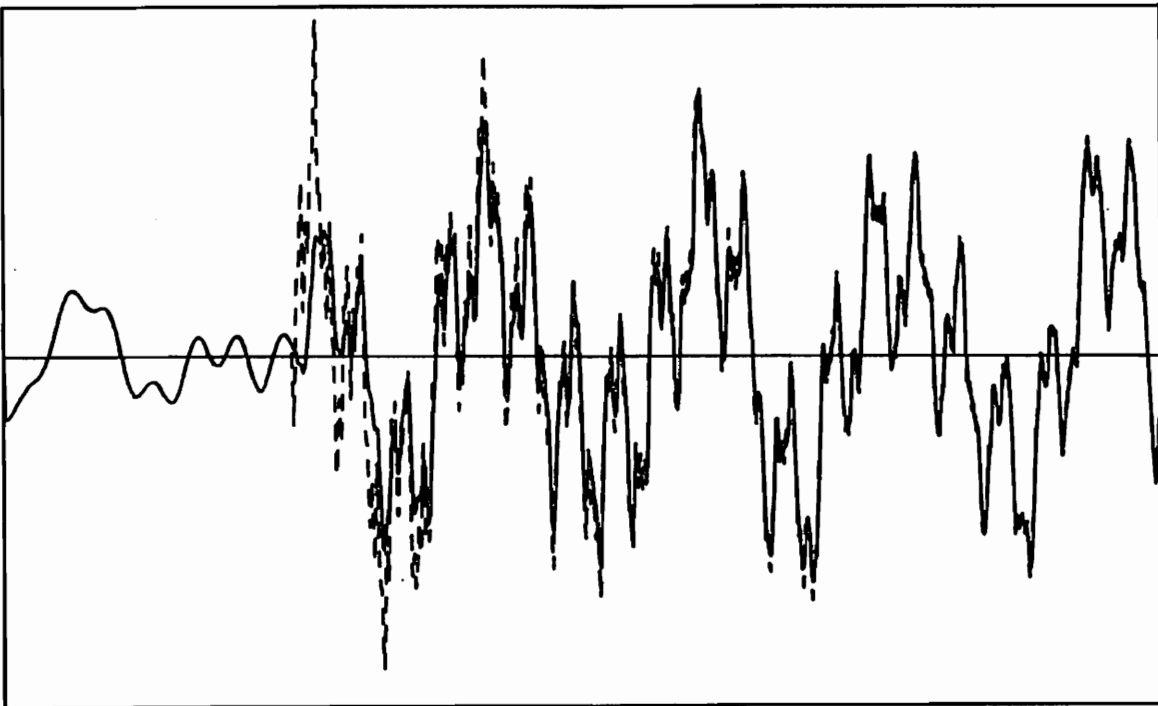


Bild 2.6 Langsamer Beobachter, Störung durch Einzelimpuls ($\text{const} = 0.99$)

An Bild 2.6 ist zu erkennen, daß der langsame Beobachter sehr viel Zeit benötigt, bis er den durch den Impuls entstandenen Fehler ausgeglichen hat. Bei dem schnellen Beobachter verschwindet der Fehler zwar sehr schnell, es muß aber ein starkes Überschwingen in Kauf genommen werden (Bild 2.8 , wegen des Überschwingens mußte ein anderer Maßstab gewählt werden). In Bild 2.7 ist der Beobachter so ausgelegt worden, daß das beim schnellen Beobachter auftretende starke Überschwingen vermieden wird und der Fehler relativ schnell verschwindet.

durchgezogen : Beobachter
gestrichelt (lange Striche) : Kontrollmessung

7. Freiheitsgrad
Meßzeit : $T = 0.5$ sec

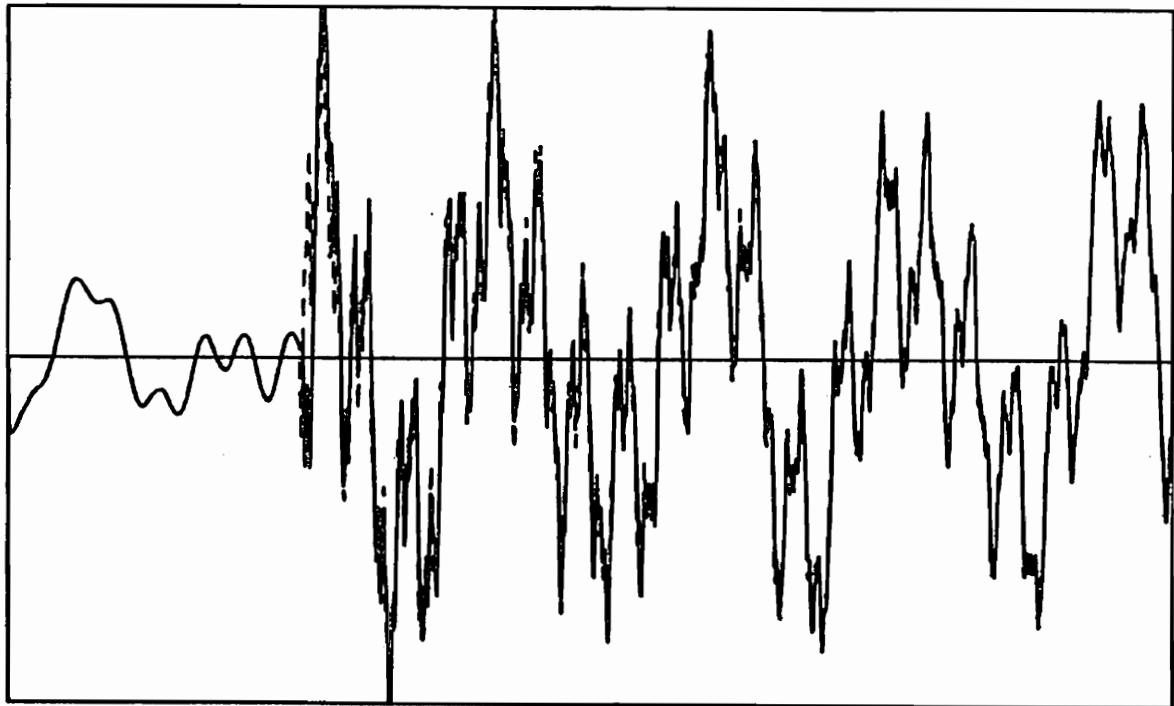


Bild 2.7 Guter Beobachter, Störung durch Einzelimpuls (const = 0.9)

durchgezogen : Beobachter
gestrichelt (lange Striche) : Kontrollmessung

7. Freiheitsgrad
Meßzeit : $T = 0.5$ sec

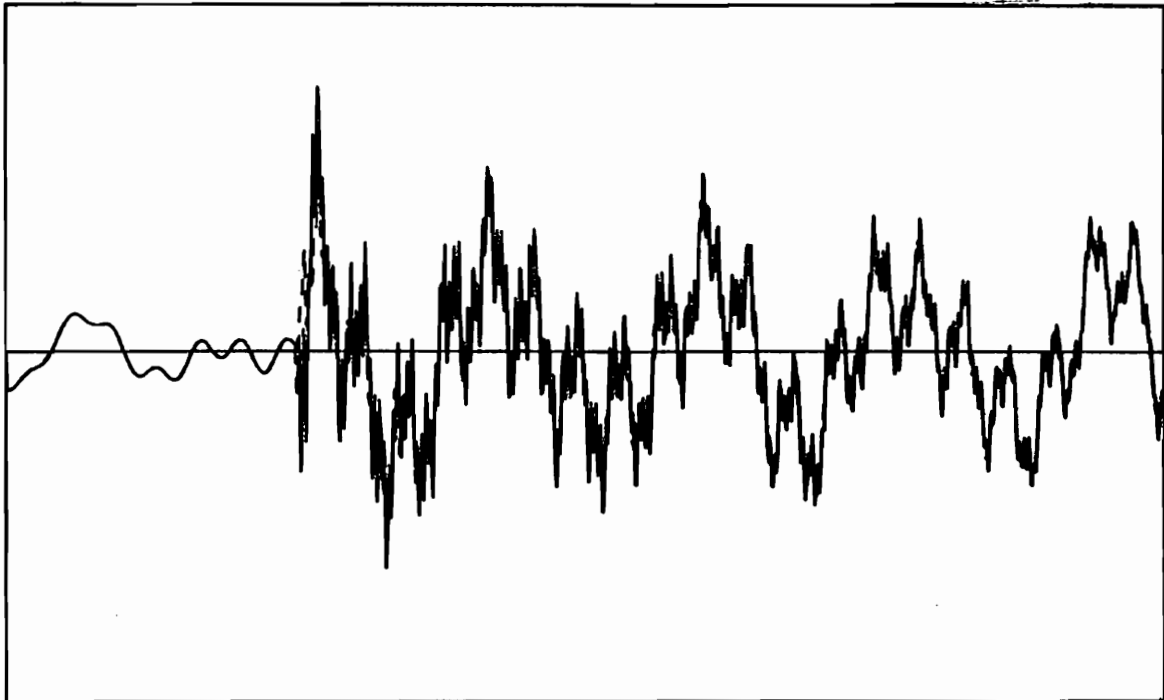


Bild 2.8 Schneller Beobachter, Störung durch Einzelimpuls ($\text{const} = 0.83$)

Rauschen auf Meßsignal

Die Ursache für eine fehlerhafte Zustandsschätzung des Beobachters ist häufig ein unsauberes Meßsignal. Für die in den nachfolgenden Bildern dargestellten Rechnungen wurde dem (simulierten) Meßsignal ein weißes Rauschen überlagert.

durchgezogen : Beobachter
gestrichelt (lange Striche) : Kontrollmessung

7. Freiheitsgrad
Meßzeit : $T = 0.5$ sec

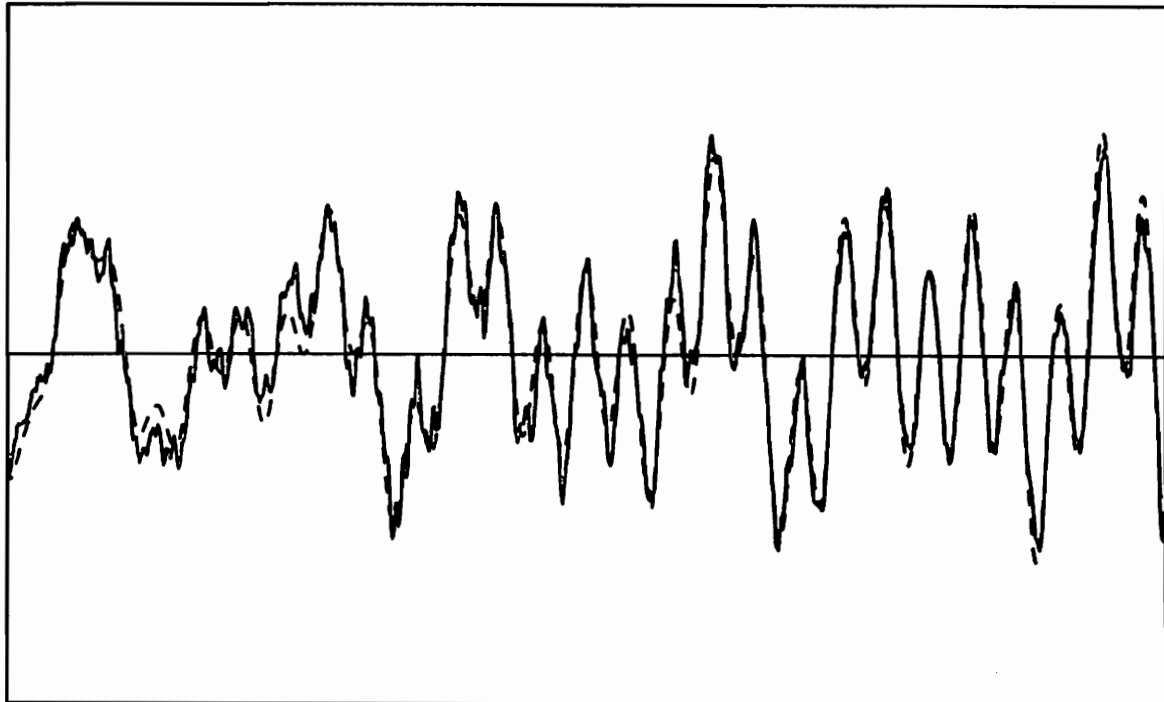


Bild 2.9 Rauschen auf Meßsignal, langsamer Beobachter ($\text{const} = 0.99$)

durchgezogen : Beobachter
gestrichelt (lange Striche) : Kontrollmessung

7. Freiheitsgrad
Meßzeit : $T = 0.5$ sec

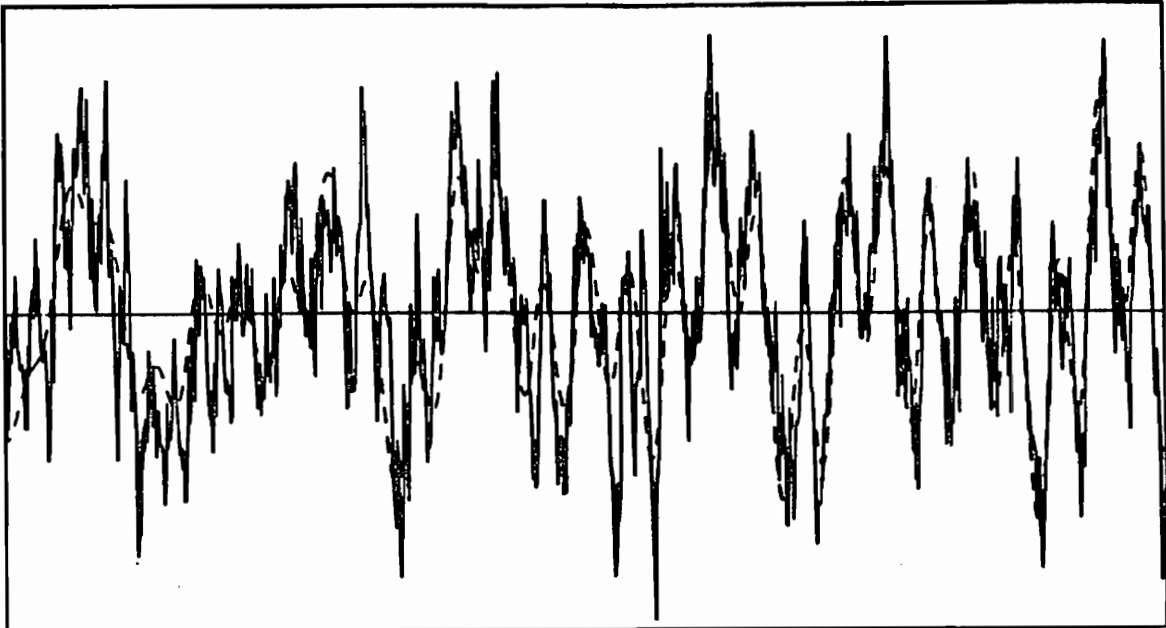


Bild 2.10 Rauschen auf Meßsignal, schneller Beobachter (const = 0.93)

An den Bildern 2.9 und 2.10 wird deutlich, daß bei einer Störung durch ein verrauschtes Meßsignal ein langsamer Beobachter wesentlich günstiger ist, als ein schneller Beobachter. Da bei einem langsamen Beobachter die Simulation des Rechenmodells gegenüber der Korrektur durch das hier fehlerbehaftete Meßsignal dominiert (s. Gl. 2.8), ist diese Tatsache leicht einzusehen.

Störung durch Rauschen auf dem System

durchgezogen : Beobachter
gestrichelt (lange Striche) : Kontrollmessung

7. Freiheitsgrad
Meßzeit : $T = 0.5$ sec

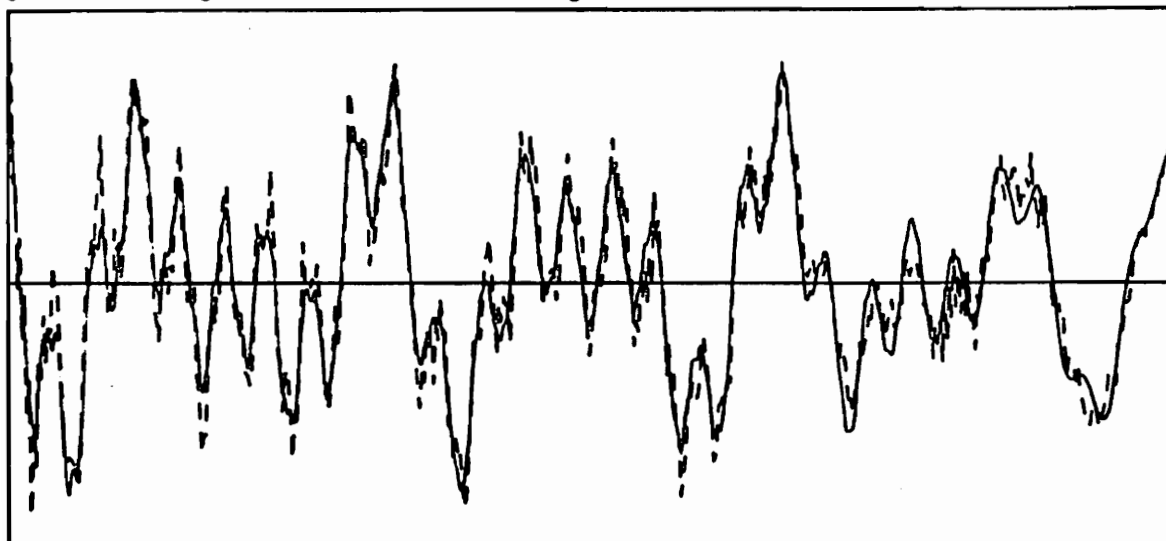


Bild 2.11 Störung durch Rauschen auf dem System, langsamer Beobachter (const = 0.99)

Bei den in den Bildern 2.11 und 2.12 dargestellten Simulationsrechnungen wirken auf alle Freiheitsgrade des Systems Kräfte, die sich als weißes Rauschen beschreiben lassen.

Diese Kräfte sind für den Beobachter unbekannt. Da es hier wichtig ist, daß der Beobachter die Fehler zwischen seiner Simulation und dem Systemverhalten ausgleicht, gibt der schnelle Beobachter das Systemverhalten besser wieder als der langsame. Der Glättungseffekt des langsamen Beobachters wird z.B. bei einem Kalman-Filter, der die gleiche Struktur besitzt wie ein Beobachter, ausgenutzt, um Meßwerte zu verbessern.

durchgezogen : Beobachter
gestrichelt (lange Striche) : Kontrollmessung

7. Freiheitsgrad
Meßzeit : $T = 0.5$ sec

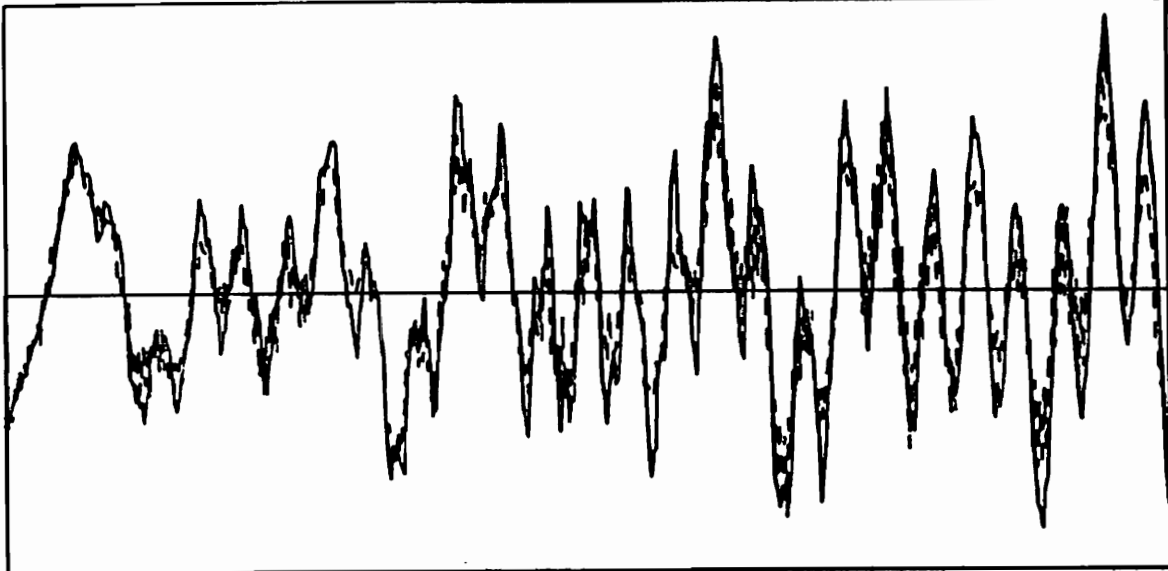


Bild 2.12 Störung durch Rauschen auf dem System, schneller Beobachter (const = 0.9)

Störung durch einen Parameterfehler bei der Modellierung des Systems

durchgezogen : Beobachter
gestrichelt (lange Striche) : Kontrollmessung
dünn durchgezogen : Beobachtungsfehler

7. Freiheitsgrad
Meßzeit : $T = 0.5$ sec

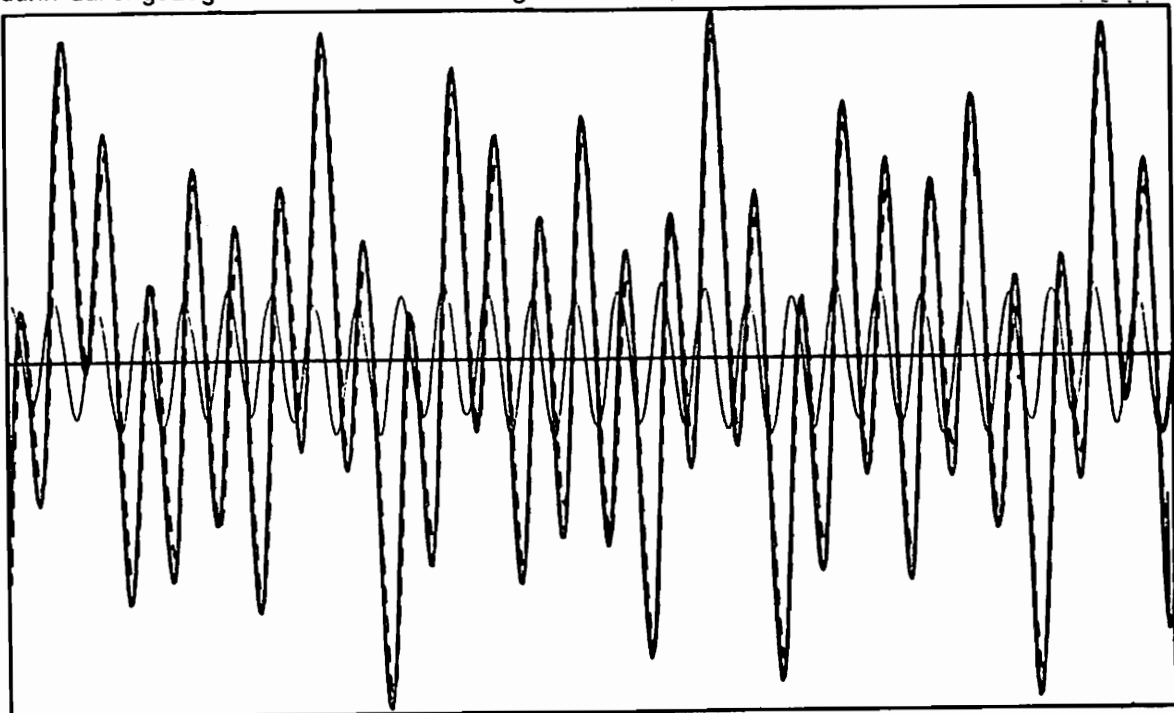


Bild 2.13 Störung durch Parameterfehler, langsamer Beobachter (const = 0.99)

durchgezogen : Beobachter
gestrichelt (lange Striche) : Kontrollmessung

7. Freiheitsgrad
Meßzeit : $T = 0.5 \text{ sec}$

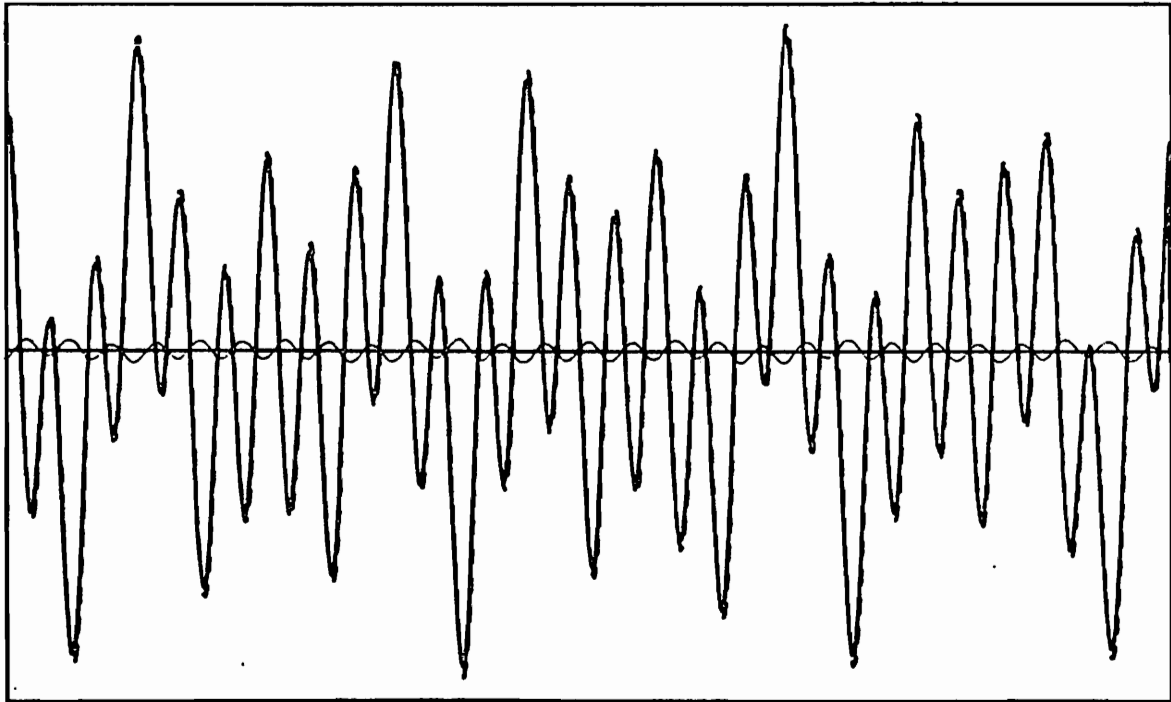


Bild 2.14 Störung durch Parameterfehler, schneller Beobachter (const = 0.9)

Die Bilder 2.13 und 2.14 zeigen Simulationsrechnungen, bei denen sich das Rechenmodell des Beobachters von dem unterscheidet, das der Simulation des realen Systems zugrunde liegt. Die Steifigkeit des 2. Balkenelements des Beobachterrechenmodells wurde um 20 % reduziert. Da bei dem schnellen Beobachter die Korrektur gegenüber der Simulation des realen Systems dominiert, bringt hier der schnelle Beobachter wesentlich bessere Ergebnisse.

2.6.3 "Optimaler" Beobachter bei Störungen durch weißes Rauschen

Die Beobachter der in den Bildern 2.6 bis 2.14 dargestellten Simulationsrechnungen sind nach einem Verfahren entworfen worden, das es ermöglicht, die Eigenwerte der Beobachtermatrix F und somit die Dynamik, mit der ein Beobachter auf Störungen und die damit verbundenen Fehler in der Zustandsschätzung reagiert, vorzugeben. Wegen der großen Bedeutung der Eigenwerte für das Verhalten des Beobachters ist dies Verfahren für die praktische Anwendung sehr interessant, wegen des relativ großen Programmieraufwandes und wegen des umfangreichen theoretischen Hintergrundes sei auf die Literatur (Ackermann /4/ und O' Reilly /6/) verwiesen, wo es ausführlich beschrieben ist.

Das nachfolgende Entwurfsverfahren (s. /12/) minimiert den Erwartungswert des Fehlerquadrates eines Beobachters (Varianz des Fehlers) unter Berücksichtigung von Störungen des Systems und des Meßsignals. Es führt auf einen Beobachter, der ähnlich dem aus der Regelungstechnik bekannten Kalman-Filter arbeitet. Die Anwendung ist auf zeitdiskrete Systeme beschränkt.

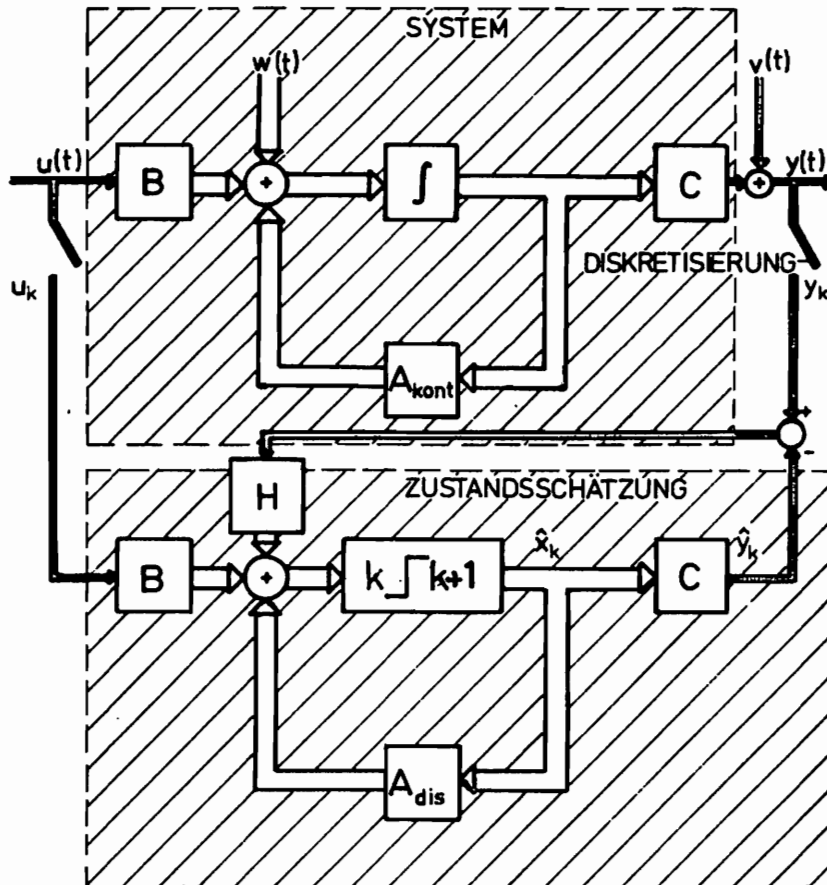


Bild 2.15 "Optimaler Beobachter" bei Störungen durch weißes Rauschen

Ausgegangen wird von der Systemgleichung

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{B} u_k + \mathbf{w}_k \quad (2.25)$$

$$y_k = \mathbf{C} \mathbf{x}_k + v_k \quad (2.26)$$

\mathbf{w}_k : Störung des Schwingungssystems

v_k : Störung des Meßsignals

Es wird vorausgesetzt, daß es sich bei \mathbf{w}_k und v_k um weißes Rauschen mit dem Mittelwert Null handelt. Die Varianzmatrizen dieser Rauschprozesse werden als bekannt vorausgesetzt.

$$\mathbf{V}_1 = E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T] \quad : \quad \text{Varianz des Systemrauschens}$$

$$\mathbf{V}_2 = E[v_k v_k^T] \quad : \quad \text{Varianz des Meßrauschens}$$

$$\mathbf{V}_{12} = E[\mathbf{w}_k v_k^T]$$

$$\mathbf{V}_{21} = E[v_k \mathbf{w}_k^T] = \mathbf{V}_{12}^T$$

\mathbf{V}_2 darf nicht singular sein. Die Variablen des Rauschprozesses $\mathbf{w}_k, \mathbf{v}_k$ und die Zustandsgrößen \mathbf{x}_k seien unkorreliert. Die Anfangswerte \mathbf{x}_0 werden ebenfalls als stochastische Variable aufgefaßt mit

$$E[\mathbf{x}_0] = \bar{\mathbf{x}}_0 \quad \text{und} \quad E[(\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0)^T] = \mathbf{Q}_0$$

Es empfiehlt, sich als Startwert für den Beobachter

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \bar{\mathbf{x}}_0$$

zu nehmen. Für den Beobachter wird die Gleichung

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{B} \mathbf{u}_k + \mathbf{H}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}_k)$$

angesetzt, womit die Bedingung $\mathbf{F} = \mathbf{A} - \mathbf{H} \mathbf{C}$ direkt durch den Ansatz erfüllt ist. Die Matrizen \mathbf{A}, \mathbf{B} und \mathbf{C} dürfen zeitabhängig sein, wenn die Zeitverläufe der Veränderungen bekannt sind. Ziel der Optimierung ist, die Varianzmatrix des Beobachtungsfehlers zu minimieren, d. h.

$$E[\tilde{\mathbf{x}}_k \tilde{\mathbf{x}}_k^T] = \tilde{\mathbf{Q}}_k + \bar{\tilde{\mathbf{x}}}_k \bar{\tilde{\mathbf{x}}}_k^T$$

$\tilde{\mathbf{x}}_k$: Beobachtungsfehler ($\tilde{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k$)

$\tilde{\mathbf{Q}}_k$: Varianz des Beobachtungsfehlers

$\bar{\tilde{\mathbf{x}}}_k$: Mittelwert des Beobachtungsfehlers

Es läßt sich leicht erreichen, daß der Mittelwert des Beobachtungsfehlers zu Null wird. Im weiteren wird angenommen, daß gilt

$$\bar{\tilde{\mathbf{x}}}_k = \mathbf{0}$$

Der Beobachtungsfehler läßt sich berechnen nach

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = (\mathbf{A} - \mathbf{H}_k \mathbf{C}) \tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{w}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{v}_k$$

Damit wird

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Q}}_{k+1} = & E[(\mathbf{A} - \mathbf{H}_k \mathbf{C}) \tilde{\mathbf{x}}_k \tilde{\mathbf{x}}_k^T (\mathbf{A} - \mathbf{H}_k \mathbf{C})^T + \mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T \\ & + \mathbf{H}_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{H}_k^T + (\mathbf{A} - \mathbf{H}_k \mathbf{C}) \tilde{\mathbf{x}}_k \mathbf{w}_k^T \\ & - (\mathbf{A} - \mathbf{H}_k \mathbf{C}) \tilde{\mathbf{x}}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{H}_k^T + \mathbf{w}_k \tilde{\mathbf{x}}_k^T (\mathbf{A} - \mathbf{H}_k \mathbf{C})^T \\ & - \mathbf{w}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{H}_k^T - \mathbf{H}_k \mathbf{v}_k \tilde{\mathbf{x}}_k^T (\mathbf{A} - \mathbf{H}_k \mathbf{C})^T - \mathbf{H}_k \mathbf{v}_k \mathbf{w}_k^T] \end{aligned}$$

Der Beobachterfehler $\tilde{\mathbf{x}}_k$ und die Störungen \mathbf{w}_k und \mathbf{v}_k sollen unkorreliert sein. Damit gilt

$$E[\tilde{\mathbf{x}}_k \mathbf{w}_k^T] = \mathbf{0} \quad ,$$

$$E[\tilde{\mathbf{x}}_k \mathbf{v}_k^T] = \mathbf{0} \quad ,$$

$$E[\mathbf{w}_k \tilde{\mathbf{x}}_k^T] = \mathbf{0}$$

und

$$E[\mathbf{v}_k \tilde{\mathbf{x}}_k^T] = \mathbf{0} \quad .$$

Hiermit ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Q}}_{k+1} &= (\mathbf{A} - \mathbf{H}_k \mathbf{C}) \tilde{\mathbf{Q}}_k (\mathbf{A} - \mathbf{H}_k \mathbf{C})^T + \mathbf{V}_1 + \mathbf{H}_k \mathbf{V}_2 \mathbf{H}_k^T \\ &\quad - \mathbf{V}_{12} \mathbf{H}_k^T - \mathbf{H}_k \mathbf{V}_{21}^T \\ &= \mathbf{A} \tilde{\mathbf{Q}}_k \mathbf{A}^T + \mathbf{V}_1 + \mathbf{H}_k (\mathbf{V}_2 + \mathbf{C} \tilde{\mathbf{Q}}_k \mathbf{C}^T) \mathbf{H}_k^T \\ &\quad - \mathbf{H}_k (\mathbf{C} \tilde{\mathbf{Q}}_k \mathbf{A}^T + \mathbf{V}_{21}^T) - (\mathbf{A} \tilde{\mathbf{Q}}_k \mathbf{C}^T + \mathbf{V}_{12}) \mathbf{H}_k^T \quad . \end{aligned}$$

Mit

$$\mathbf{\Theta}_k := \mathbf{V}_2 + \mathbf{C} \tilde{\mathbf{Q}}_k \mathbf{C}^T$$

und

$$\mathbf{\Psi}_k := \mathbf{A} \tilde{\mathbf{Q}}_k \mathbf{C}^T + \mathbf{V}_{12}$$

erhält man schließlich

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Q}}_{k+1} &= \mathbf{A} \tilde{\mathbf{Q}}_k \mathbf{A}^T + \mathbf{V}_1 + \mathbf{H}_k \mathbf{\Theta}_k \mathbf{H}_k^T - \mathbf{H}_k \mathbf{\Psi}_k^T - \mathbf{\Psi}_k \mathbf{H}_k^T \\ &= (\mathbf{H}_k - \mathbf{\Psi}_k \mathbf{\Theta}_k^{-1}) \mathbf{\Theta}_k (\mathbf{H}_k - \mathbf{\Psi}_k \mathbf{\Theta}_k^{-1})^T - \mathbf{\Psi}_k \mathbf{\Theta}_k^{-1} \mathbf{\Psi}_k^T \\ &\quad + \mathbf{A} \tilde{\mathbf{Q}}_k \mathbf{A}^T + \mathbf{V}_1 \quad , \end{aligned}$$

wie sich durch ausmultiplizieren der letzten Gleichung leicht nachweisen läßt.

Die notwendige Bedingung für eine Matrix \mathbf{H}_k , die $\tilde{\mathbf{Q}}_{k+1}$ minimiert lautet mit

$$\mathbf{Q}_{k+1} = \text{Min} [\tilde{\mathbf{Q}}_{k+1}]$$

also

$$\frac{\partial \mathbf{Q}_{k+1}}{\partial \mathbf{H}_k} = \mathbf{\Theta}_k (\mathbf{H}_k - \mathbf{\Psi}_k \mathbf{\Theta}_k^{-1})^T + (\mathbf{H}_k - \mathbf{\Psi}_k \mathbf{\Theta}_k^{-1}) \mathbf{\Theta}_k = \mathbf{0} \quad .$$

Diese Gleichung wird erfüllt, wenn gilt

$$\mathbf{H}_k - \mathbf{Y}_k \mathbf{\Theta}_k^{-1} = \mathbf{0} \quad ,$$

bzw.

$$\mathbf{H}_k = (\mathbf{A} \mathbf{Q}_k \mathbf{C}^T + \mathbf{V}_{12}) (\mathbf{V}_2 + \mathbf{C} \mathbf{Q}_k \mathbf{C}^T)^{-1} \quad .$$

Damit kann der in den Gl. 2.27 bis 2.28 angegebene Iterationsalgorithmus zur Bestimmung von \mathbf{H}_k aufgestellt werden. Er kann bei zeitvarianten Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{C} für jeden Zeitschritt durchgeführt werden. Bei konstanten Systemmatrizen kann \mathbf{H} bereits vor der Beobachtungsrechnung bestimmt werden, indem dieser Iterationsalgorithmus so lange durchgeführt wird bis sich die Beobachtereingangsmatrix \mathbf{H}_k nicht mehr wesentlich verändert.

$$\mathbf{H}_k = (\mathbf{A} \mathbf{Q}_k \mathbf{C}^T + \mathbf{V}_{12}) (\mathbf{V}_2 + \mathbf{C} \mathbf{Q}_k \mathbf{C}^T)^{-1} \quad (2.27)$$

$$\mathbf{Q}_{k+1} = (\mathbf{A} - \mathbf{H}_k \mathbf{C}) \mathbf{Q}_k \mathbf{A}^T + \mathbf{V}_1 - \mathbf{H}_k \mathbf{V}_{12}^T \quad (2.28)$$

Start :

$$\mathbf{Q}_0 = E[(\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0) (\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0)^T] \quad (2.29)$$

Die Wahl von \mathbf{Q}_0 ist bei konstanten Systemmatrizen nicht sehr bedeutsam, da auch \mathbf{Q}_k auf einen festen Wert hin konvergiert. Wichtiger und auch wesentlich schwieriger ist eine geeignete Wahl der Varianzmatrizen der Störungen \mathbf{V}_1 , \mathbf{V}_2 und \mathbf{V}_{12} . Allgemein kann man den Einfluß von \mathbf{V}_1 und \mathbf{V}_2 auf die Eigenschaften eines Beobachters so beschreiben :

- Je größer \mathbf{V}_2 gewählt wird, desto langsamer wird der Beobachter. Wegen größerer Störungen des Meßsignals kann es nicht so stark zur Korrektur des Zustandsvektors herangezogen werden.
- Je größer \mathbf{V}_1 gewählt wird, desto schneller wird der Beobachter. Wegen der großen Störungen des Systems ist es für den Beobachter wichtig, daß er schnell die dadurch verursachten Fehler korrigiert.

Diese Eigenschaften werden auch bei den in den Bildern 2.9 bis 2.12 dargestellten Simulationsrechnungen deutlich.

Die Matrix \mathbf{V}_{12} wird häufig gleich Null gesetzt, womit vorausgesetzt wird, daß das Meßrauschen und die Systemstörungen unkorreliert sind.

2.7 Reduktion der Systemfreiheitsgrade durch "modale Beobachter"

2.7.1 Allgemeines

Bedingt durch das Bestreben, das Schwingungsverhalten des realen Systems möglichst genau zu beschreiben (z. B. durch FEM-Modelle), und die zunehmende Leistungsfähigkeit der Rechenanlagen, enthalten die mathematischen Modelle schwingungsfähiger Systeme in der Regel eine große Anzahl von Freiheitsgraden. Dies führt zu Schwierigkeiten beim Beobachterentwurf, zu Echtzeitproblemen bei der Realisierung, zu Speicherplatzproblemen, wenn die Realisierung auf Mikrorechnern erfolgen soll, und zu Stabilitätsproblemen durch numerische Ungenauigkeiten des Beobachters.

Eine Möglichkeit, die Anzahl der Freiheitsgraden wesentlich zu reduzieren bietet das in diesem Abschnitt beschriebene Verfahren der "modalen Beobachter", einer Kombination von Beobachtertheorie und Modalanalyse. Häufig wird es erst durch eine solche Reduktion der Freiheitsgrade möglich, einen Beobachter für größere mechanische Strukturen zu entwerfen. Es ist auch sinnlos, alle Freiheitsgrade des Systems in einer Echtzeitrechnung mitzuführen, wenn nur wenige Eigenschwingungen angeregt werden und das Problem nach der Modaltransformation mit nur wenigen Freiheitsgraden beschrieben werden kann. Besonders deutlich wird das bei periodisch angeregten Schwingungen, z. B. unwuchterregte Schwingungen einer Kraftwerksturbine.

In der Regel werden höhere Eigenschwingungen nicht so stark angeregt wie die niedrigen. Um sie mit gleicher Amplitude anregen zu können, ist eine wesentlich größere Energie notwendig, und sie sind stärker gedämpft, so daß eine Vernachlässigung der Eigenschwingungen ab einer bestimmten Ordnung keinen großen Fehler mehr verursacht. Die am Ende dieses Abschnitts dargestellten Rechnungen verdeutlichen dies. Nachdem durch die Transformation der Systemgleichung auf Modalform die Eigenschwingungen entkoppelt sind, werden nur die für das Schwingungsverhalten relevanten Eigenschwingungen beobachtet.

Für allgemeine regelungstechnische Probleme ist eine Ordnungsreduktion über die Modalform von L. Litz entwickelt worden (s. /30/). Bei dem Reglerentwurf werden nur die sogenannten dominanten Eigenschwingungen berücksichtigt, das sind Eigenschwingungen, die vom Eingang angeregt werden und die einen Einfluß auf das Ausgangssignal ausüben. Das hier beschriebene Verfahren zur modalen Reduktion der Freiheitsgrade ist speziell für strukturdynamische Probleme und für Überwachungsaufgaben mit dem Beobachter aufbereitet worden.

Stein, Fick /31/ und Drechsler /32/ haben ein Verfahren zur Überwachung der Torsionsschwingungen einer Kraftwerksturbine entwickelt, wobei die ersten Eigenschwingungen getrennt simuliert und die Simulation mit Hilfe des Beobachtungsfehlers korrigiert wird. Da die Eigenschwingungen einzeln bearbeitet werden, lassen sich die aus der Literatur bekannten Verfahren zum Beobachterentwurf im Gegensatz zu dem hier beschriebenen Verfahren nicht direkt anwenden.

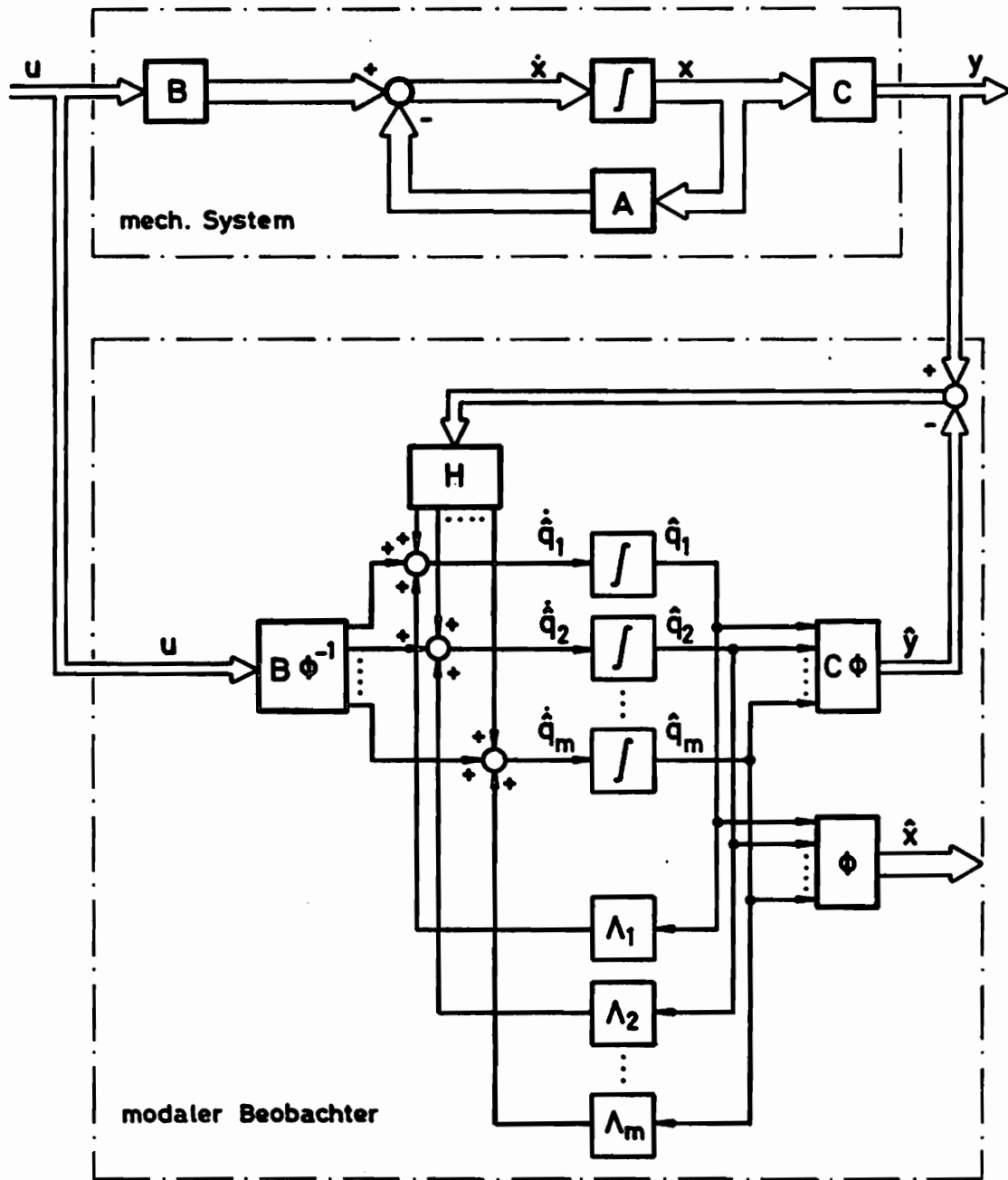


Bild 2.16 Modaler Beobachter

Es ist möglich, die i. a. komplexe Rechnung mit modalen Zustandsgrößen durch eine reelle zu ersetzen, wenn man die modifizierte Modalform benutzt. Es sind dann nur \mathbf{q} , \mathbf{A} , Φ durch die im Abschnitt 2.7.4 hergeleiteten Größen \mathbf{q}_{mod} , $\mathbf{\Lambda}_{\text{mod}}$ und Φ_{mod} zu ersetzen.

2.7.2 Modaltransformation von Beobachter und System bei zeitkontinuierlicher Rechnung

Ausgehend von der Systemgleichung eines viskos gedämpften linearen Schwingungssystems:

$$\mathbf{M} \ddot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{D} \dot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{K} \boldsymbol{\xi} = \mathbf{f}(t) \quad \frac{n}{2} \text{ Freiheitsgrade} \quad ,$$

erhält man die Zustandsraumdarstellung des Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_{\text{kont}} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} \quad .$$

Nach der Modaltransformation dieser Gleichung mit

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{q} \quad (2.30)$$

$\boldsymbol{\Phi}$: Modalmatrix

\mathbf{q} : modaler Zustandsvektor ,

ergeben sich n entkoppelte Gleichungen

$$\dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{A} \boldsymbol{\Phi} \mathbf{q} + \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (2.31)$$

$$= \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{q} + \mathbf{B}^* \mathbf{u} \quad ,$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{A} \boldsymbol{\Phi} = \text{diag} [\lambda_1 , \lambda_2 , \dots , \lambda_n]$$

$$\mathbf{B}^* = \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{B} \quad .$$

Die Eigenformen eines linearen, viskos gedämpften System lassen sich so normieren, daß gilt

$$\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{D}^* \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{I} \quad , \quad (2.32)$$

$$\mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

und damit auch

$$\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{K}^* \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Lambda} \quad (2.33)$$

$$\mathbf{K}^* = \begin{bmatrix} -\mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad .$$

Mit dieser Gleichung läßt sich $\boldsymbol{\Phi}^{-1}$ auch ohne Inversion berechnen

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1} = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{D}^* \quad (2.34)$$

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1} = \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{K}^* \quad . \quad (2.35)$$

$$\boldsymbol{\Lambda}^{-1} = \text{diag} [\frac{1}{\lambda_1} , \frac{1}{\lambda_2} , \dots , \frac{1}{\lambda_n}]$$

Die Beobachtergleichung wird dann folgendermaßen angesetzt:

$$\dot{\hat{\mathbf{q}}} = \mathbf{F} \hat{\mathbf{q}} + \mathbf{H} \mathbf{y} + \mathbf{B}^* \mathbf{u} \quad . \quad (2.36)$$

Der Beobachtungsfehler \tilde{q} berechnet sich nach

$$\dot{\tilde{q}} = \hat{\dot{q}} - \dot{q} = F \hat{q} + H y + B^* u - A q - B^* u \quad (2.37)$$

$$= F \hat{q} + H y - A q$$

$$y = C x = C \Phi q \quad .$$

Damit der Beobachtungsfehler abklingt muß jetzt gelten

$$F = A - H C^* \quad (2.38)$$

$$C^* = C \Phi \quad . \quad (2.39)$$

Die Differentialgleichung für das Zeitverhalten des Beobachtungsfehlers lautet jetzt

$$\dot{\tilde{q}} = F \tilde{q} \quad .$$

2.7.3 Modaltransformation von Beobachter und System bei zeitdiskreter Rechnung

Die Zeitdiskretisierung wird am günstigsten nach der Modaltransformation durchgeführt. Es gilt dann

$$q_{k+1} = A_{dis} q_k + B_{dis}^* u_k \quad . \quad (2.40)$$

$$A_{dis} = \text{diag} [e^{\lambda_1 \Delta t}, e^{\lambda_2 \Delta t}, \dots, e^{\lambda_n \Delta t}] \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} B_{dis}^* &= \Phi^{-1} \text{diag} \left[\frac{e^{\lambda_1 \Delta t} - 1}{\lambda_1}, \dots, \frac{e^{\lambda_n \Delta t} - 1}{\lambda_n} \right] B_{kont} \\ &= \Phi^{-1} B_{dis} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Der Beobachter hat jetzt die Form

$$\hat{q}_{k+1} = F \hat{q}_k + H y_k + B_{dis}^* u_k \quad (2.43)$$

$$F = A_{dis} - H C^* \quad (2.44)$$

$$C^* = \Phi C \quad .$$

2.7.4 Modifizierte reelle Modalform

Die modifizierte Modalform vermeidet unter Ausnutzung der Tatsache, daß konjugiert komplexe Eigenwerte und Eigenformen vorliegen, die i.a. komplexe Rechnung mit den modal transformierten Größen /33/.

Die n konjugiert komplexen Eigenformen Φ_k und Eigenwerte λ_k lassen sich schreiben als

$$\Phi_{2i+1} = \alpha_i + j \beta_i \quad ,$$

$$\Phi_{2i} = \alpha_i - j \beta_i \quad ,$$

$$\lambda_{2i+1} = \omega_i + j \delta_i$$

und

$$\lambda_{2i} = \omega_i - j \delta_i \quad \text{mit} \quad i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} \quad .$$

Mit der Modalmatrix

$$\Phi_{\text{mod}} = [\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_{n/2}, \beta_{n/2}] \quad (2.45)$$

führt die Transformation auf die modifizierte Modalform mit

$$\mathbf{x} = \Phi_{\text{mod}} \mathbf{q} \quad (2.46)$$

auf die Systemgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \Phi_{\text{mod}}^{-1} \mathbf{A} \Phi_{\text{mod}} \mathbf{q} + \Phi_{\text{mod}}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{u} \\ &= \mathbf{A}_{\text{mod}} \mathbf{q} + \Phi_{\text{mod}}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{u} \end{aligned} \quad (2.47)$$

und

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \Phi_{\text{mod}} \mathbf{q} \quad , \quad (2.48)$$

$$\mathbf{A}_{\text{mod}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{A}_{n/2} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \delta_i & \omega_i \\ -\omega_i & \delta_i \end{bmatrix} \quad . \quad (2.50)$$

Φ_{mod}^{-1} läßt sich auch hier mit Hilfe der verallgemeinerten Orthogonalitätsbeziehungen bestimmen, indem man diese komplexen Gleichungen für je zwei konjugiert komplexe Eigenformen und Eigenwerte in zwei reelle Gleichungen umformt.

$$\Phi_{\text{mod}}^{-1} = \mathbf{Z} \Phi_{\text{mod}}^T \mathbf{D}^* \quad (2.51)$$

oder

$$\Phi_{\text{mod}}^{-1} = \mathbf{A}_{\text{mod}}^{-1} \mathbf{Z} \Phi_{\text{mod}}^T \mathbf{K}^* \quad , \quad (2.52)$$

$$\mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{K}^* = \begin{bmatrix} -\mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad .$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 2 & & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -2 & \dots & \\ & & \dots & 2 \\ & & & -2 \end{bmatrix} \quad .$$

Die Übertragungsmatrizen für einen Zeitschritt Δt lassen sich hier auch ohne Reihenentwicklung ermitteln.

$$\mathbf{A}_{i,dls} = e^{\mathbf{A}_{i,kont} \Delta t} = e^{\delta_i \Delta t} \begin{bmatrix} \cos(\omega_i \Delta t) & \sin(\omega_i \Delta t) \\ -\sin(\omega_i \Delta t) & \cos(\omega_i \Delta t) \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

und

$$\mathbf{B}_{dls}^* = \Phi_{mod}^{-1} \mathbf{B}_{dls} = \begin{bmatrix} v_1 & w_1 & & & & 0 \\ -w_1 & v_1 & & & & \\ & & \dots & & & \\ & & & \dots & & \\ 0 & & & & v_{n/2} & w_{n/2} \\ & & & & -w_{n/2} & v_{n/2} \end{bmatrix} \Phi_{mod}^{-1} \mathbf{B}_{kont} \quad (2.54)$$

mit

$$v_i = \frac{1}{\delta_i^2 + \omega_i^2} \left(e^{\delta_i \Delta t} (\delta_i \cos(\omega_i \Delta t) + \omega_i \sin(\omega_i \Delta t)) - \delta_i \right)$$

und

$$w_i = \frac{1}{\delta_i^2 + \omega_i^2} \left(e^{\delta_i \Delta t} (\delta_i \sin(\omega_i \Delta t) - \omega_i \cos(\omega_i \Delta t)) + \omega_i \right).$$

2.7.5 Reduktion der Freiheitsgrade des Beobachters

Es wird ausgegangen von der modaltransformierten Systemgleichung

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{A}_{dls} \mathbf{q}_k + \mathbf{B}_{dls}^* \mathbf{u}_k$$

In der weiteren Rechnung sollen nur m Eigenschwingungen ($m \leq n$) berücksichtigt werden. Durch Umsortieren ist leicht zu erreichen, daß die oberen m der n entkoppelten modalen Gleichungen die relevanten Eigenwerte und Eigenformen enthalten. Die entsprechenden modalen Zustandsgrößen seien in \mathbf{q}_k^{\prime} , während mit $\mathbf{q}_k^{\prime\prime}$ die Eigenschwingungen beschrieben werden, die weggelassen werden sollen. Die anderen Matrizen sind dann entsprechend zu unterteilen:

$$\mathbf{q}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_k^{\prime} \\ \mathbf{q}_k^{\prime\prime} \end{bmatrix}, \quad (2.55)$$

$$\mathbf{A}_{dls} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{dls}^{\prime} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{dls}^{\prime\prime} \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

und

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi^{\prime} & \Phi^{\prime\prime} \end{bmatrix}. \quad (2.57)$$

Sind die Eigenformen so normiert, daß gilt $\Phi^T D^* \Phi = I$, bzw. $\Phi^T K^* \Phi = \Lambda$, dann läßt sich folgende Pseudoinverse Φ^{-1} von Φ' berechnen:

$$\Phi'^{-1} = \Phi'^T D^* \quad , \quad (2.58a)$$

$$D^* = \begin{bmatrix} D & M \\ M & 0 \end{bmatrix}$$

bzw.

$$\Phi'^{-1} = \Lambda'^{-1} \Phi'^T K^* \quad . \quad (2.58b)$$

$$K^* = \begin{bmatrix} -K & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}$$

Mit diesen Größen und mit

$$B_{dis}^* = \Phi'^{-1} B_{dis} = \begin{bmatrix} \Phi'^{-1} \\ \Phi''^{-1} \end{bmatrix} B_{dis} \quad (2.59)$$

läßt sich die modal transformierte Differentialgleichung in die Gleichungen

$$q'_{k+1} = \Lambda' q'_k + \Phi'^{-1} B_{dis} u_k \quad (2.60)$$

und

$$q''_{k+1} = \Lambda'' q''_k + \Phi''^{-1} B_{dis} u_k \quad (2.61)$$

unterteilen. Die Beobachtungsgleichung wird folgendermaßen angesetzt:

$$\hat{q}'_{k+1} = F \hat{q}'_k + H y_k + \Phi'^{-1} B_{dis} u_k \quad . \quad (2.62)$$

Als Beobachtungsfehler \tilde{q}'_{k+1} ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \tilde{q}'_{k+1} &= \hat{q}'_{k+1} - q'_{k+1} \\ &= F \hat{q}'_k + H C \Phi' q'_k + H C \Phi'' q''_k + \Phi'^{-1} B_{dis} u_k - \Lambda'_{dis} q'_k \\ &\quad - \Phi'^{-1} B_{dis} u_k \quad . \end{aligned} \quad (2.63)$$

Mit

$$F = \Lambda'_{dis} - H C \Phi'$$

gilt

$$\tilde{q}'_{k+1} = F \tilde{q}'_k + \underbrace{H C \Phi'' q''_k}_{\text{Störglied}} \quad . \quad (2.64)$$

Die Rücktransformation ergibt:

$$\hat{x}_k = \Phi' \hat{q}_k' \quad . \quad (2.65)$$

Der Beobachtungsfehler lautet dann

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k+1} &= \hat{x}_{k+1} - x_{k+1} = \Phi' \hat{q}_{k+1}' - (\Phi' q_{k+1}' + \Phi'' q_{k+1}'') \\ &= \Phi' \tilde{q}_{k+1}' - \Phi'' q_{k+1}'' \\ &= \Phi' F \tilde{q}_k' + \Phi' H C \Phi'' q_k'' - \Phi'' q_{k+1}'' \quad . \end{aligned} \quad (2.66)$$

Der Beobachtungsfehler hängt also linear von q_k'' bzw. q_{k+1}'' ab, das gemäß der Voraussetzung sehr klein sein soll. Bei Schwingungssystemen ist diese Voraussetzung in der Regel für die höheren Eigenschwingungen erfüllt, die normalerweise nicht so stark angeregt werden und die durch die größeren Dämpfungen schnell abklingen. Bis auf die Rücktransformation der modalen Größen läßt sich die komplette Rechnung mit der reduzierten Anzahl von Freiheitsgraden durchführen. Interessieren nur die Zustandsgrößen an bestimmten Stellen, dann braucht man mit der Rücktransformation auch nur diese Größen zu erzeugen, d. h. es sind nur die entsprechenden Zeilen von Φ' mit \hat{q}_k' zu multiplizieren.

In Simulationsrechnungen und bei Versuchen mit einfachen Modellen (s. Abschnitte 6 und 7) hat sich der modale Beobachter als wirksames Mittel zu einer deutlichen Reduktion der Freiheitsgrade erwiesen. Bei der Anwendung gibt es neben der Verwendung des vollständigen Meßsignals noch die Möglichkeit, mit einem Tiefpaßfilter alle Frequenzen oberhalb der höchsten berücksichtigten Eigenfrequenz aus dem Meßsignal herauszufiltern. Damit wird das Störglied $H C \Phi'' q_k''$ zu Null. Dies Vorgehen ist gerade beim Einsatz schneller Beobachter von Vorteil; denn dadurch, daß sie schnell auf die durch das Weglassen höherer Eigenfrequenzen verursachten Fehler reagieren, erzeugen sie durch Überschwingen noch größere Fehler.

In den Bildern 2.17 bis 2.20 sind Ergebnisse von Simulationsrechnungen dargestellt, in denen der im Abschnitt 2.6.2 beschriebene einseitig eingespannte Biegebalken beobachtet wird, der an seinem freien Ende eine Wegerregung mit einer Rechteckfunktion erfährt. Als Meßsignal für den Beobachter wurden die Schwingungen des 5. Freiheitsgrades verwendet, dargestellt sind die Schwingungen des 7. Freiheitsgrades. Beim Beobachterentwurf wurden 1 - 4 Eigenschwingungen berücksichtigt.

Der Fehler, der durch das Weglassen höherer Eigenschwingungen verursacht wird, hängt ab von der Erregung und der Anzahl der verwendeten Eigenschwingungen. Bei dem Beispiel erhält man schon mit 3 Eigenschwingungen (Reduktion von 20 auf 6 Freiheitsgrade) einen sehr guten Beobachter.

durchgezogen : Beobachter
gestrichelt (lange Striche) : Meßwert
dünn durchgezogen : Beobachtungsfehler
strich-punktiert : Eingangssignal

7. Freiheitsgrad
Meßzeit : $T = 0.5$ sec

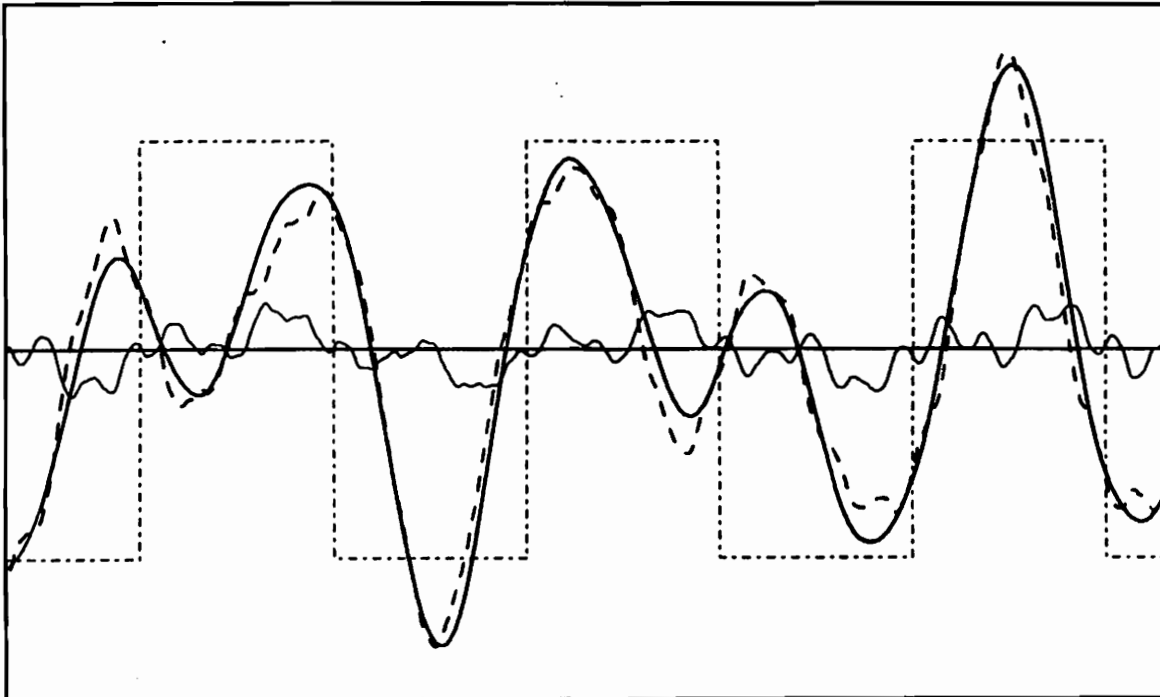


Bild 2.17 Modaler Beobachter bei Berücksichtigung einer Eigenschwingung

durchgezogen : Beobachter
gestrichelt (lange Striche) : Meßwert
dünn durchgezogen : Beobachtungsfehler
strich-punktiert : Eingangssignal

7. Freiheitsgrad
Meßzeit : $T = 0.5$ sec

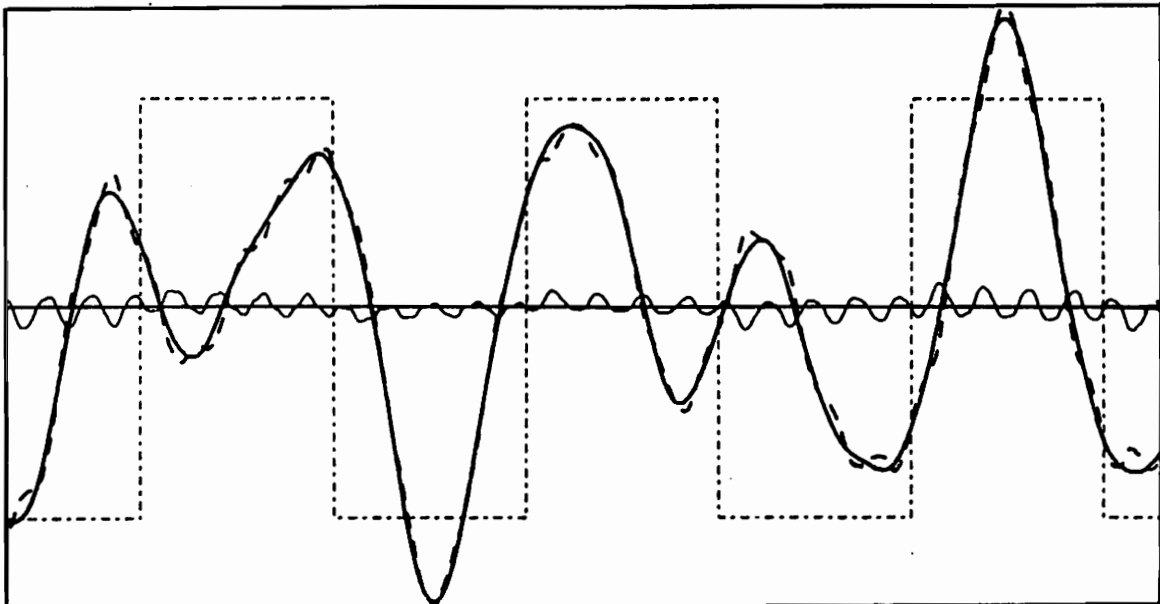


Bild 2.18 Modaler Beobachter bei Berücksichtigung von zwei Eigenschwingungen

durchgezogen : Beobachter
gestrichelt (lange Striche) : Meßwert
dünn durchgezogen : Beobachtungsfehler
strich-punktiert : Eingangssignal

7. Freiheitsgrad
Meßzeit : $T = 0.5 \text{ sec}$

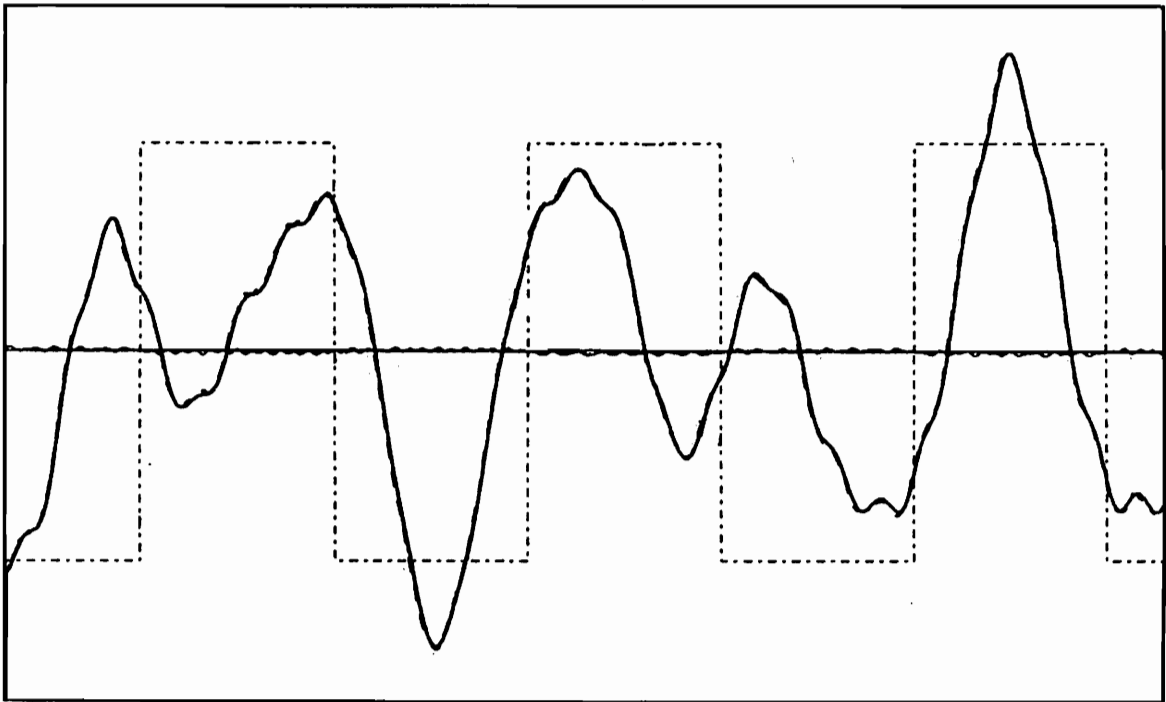


Bild 2.19 Modaler Beobachter bei Berücksichtigung von drei Eigenschwingungen

durchgezogen : Beobachter
gestrichelt (lange Striche) : Meßwert
dünn durchgezogen : Beobachtungsfehler
strich-punktiert : Eingangssignal

7. Freiheitsgrad
Meßzeit : $T = 0.5 \text{ sec}$

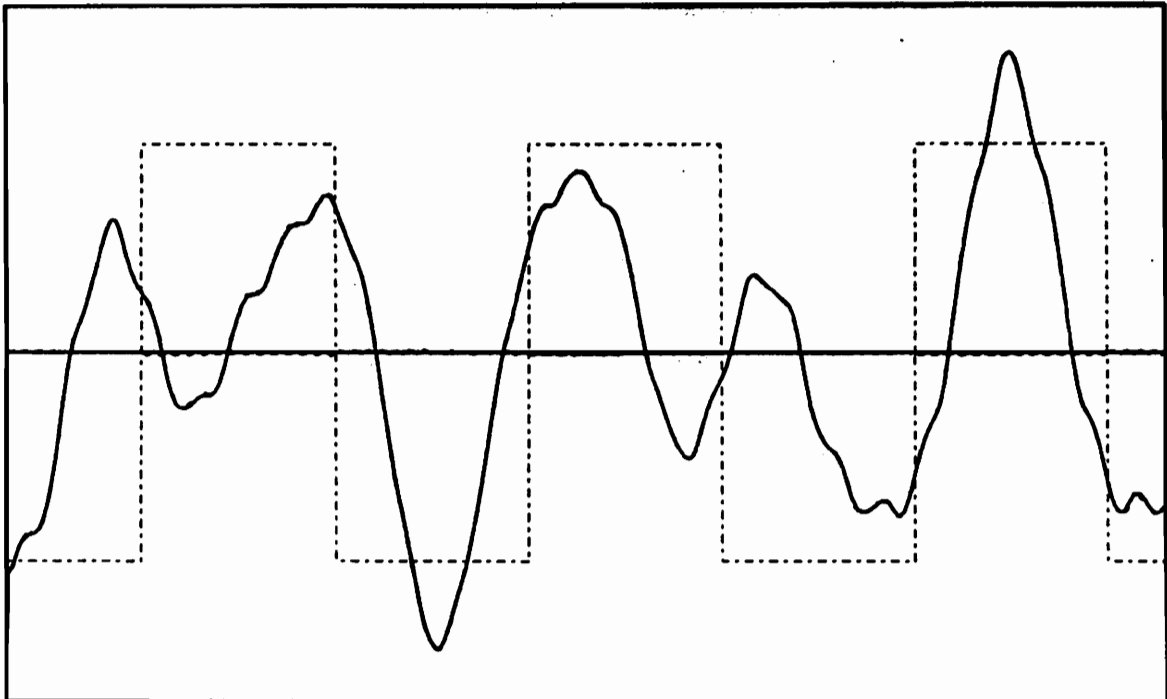


Bild 2.20 Modaler Beobachter bei Berücksichtigung von vier Eigenschwingungen

Die Vorteile des modalen Beobachters lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

- Durch die Reduktion der Freiheitsgrade benötigt der Beobachter weniger Rechenzeit (wichtig für on-line Betrieb).
- Weggelassen werden Größen (höhere Eigenformen), die die Rechenmodelle häufig schlecht wiedergeben und dadurch Beobachtungsfehler verursachen.
- Die bekannten Entwurfsmethoden können auf den Beobachter reduzierter Ordnung angewendet werden.

2.8 Schadensfrüherkennung mit Hilfe von Beobachtern

Das Schwingungsverhalten von Maschinen während des Betriebs an zugänglichen Stellen zu messen, bringt keine technischen Schwierigkeiten mit sich und ist auch allgemein üblich.

Eine Möglichkeit der Schadensfrüherkennung oder einer Lebensdauerberechnung mit Hilfe von Beobachtern, die ja den gesamten Schwingungszustand erfassen, ist die Festlegung von maximal zulässigen Amplituden der Schwingungen an den einzelnen Punkten des Systems. Für größere technische Schwingungssysteme sind hier "modale Beobachter" geeignet. Ein Überschreiten kann dann entweder einen Alarm auslösen oder, wenn die Überschreitungen der Dauerfestigkeit abgezählt werden, kann eine Abschätzung der verbleibenden Lebensdauer durchgeführt werden. Eine Lebensdauerberechnung ist so auch für Stellen möglich, die einer Messung unzugänglich sind. Bei der Anwendung von modalen Beobachtern kann der Vektor der maximal zulässigen Amplituden einmalig mit der Modalmatrix multipliziert werden, so daß die ständige Rücktransformation der beobachteten Zustandsgrößen entfällt und dadurch auch bei Systemen mit vielen Freiheitsgraden geringe Rechenzeiten des Beobachters zu erreichen sind.

Eine weitere Möglichkeit, Beobachter zur Schadensfrüherkennung zu nutzen, ist, die Redundanz des Identitätsbeobachters, d. h. die eigentlich überflüssige Schätzung der Zustandsgrößen an der Meßstelle, zu nutzen und aus Abweichungen zwischen Schätzung und Messung auf Veränderungen der Systemmatrix zu schließen. Die Ursache kann entweder eine Vergrößerung der Meßfehler (z. B. durch Defekt an den Meßwertaufnehmern) sein, oder eine Vergrößerung dieser Abweichung deutet auf eine Veränderung des realen Systems gegenüber dem Rechenmodell für den Beobachterentwurf hin. Das Auffinden von Sensorfehlern mit Hilfe von Beobachtern ist in /34/ und /35/ beschrieben.

2.9 Erweiterung des Beobachters um einen Formfilter

Motiviert durch ein 50 Hz Netzbrummen im Meßsignal bei den Messungen am Balkenversuchsstand wurde untersucht, wie eine solche periodische Störung vermieden werden kann. Die später beschriebene Parameterbestimmung mit Hilfe des Beobachtungsfehlers reagiert zwar nicht empfindlich auf Störungen in Form von weißem Rauschen, es ist

aber wichtig, periodische Störsignale zu unterdrücken. Das kann dadurch geschehen, daß die Systemmatrix \mathbf{A}_{dis} für den modal transformierten Beobachter um einen Formfilter erweitert wird. Anschaulich kann man sich vorstellen, daß das Schwingungssystem um einen 1-Massen-Schwinger erweitert wird, dessen Eigenfrequenz genau mit der Frequenz der Störung übereinstimmt. Dieser 1-Massen-Schwinger, der mit dem System nicht gekoppelt sein soll, filtert aus dem Meßsignal die Störschwingung heraus. Wenn die Meßmatrix \mathbf{C} entsprechend erweitert wird, tritt diese Störung in dem Beobachtungsfehler $\hat{\mathbf{y}}_k = \mathbf{C} \hat{\mathbf{q}}_k - \mathbf{y}_k$, der über die Beobachtermatrix \mathbf{H} in die Zustandsschätzung zurückgeführt wird, nicht mehr auf. Der Beobachter kann für das erweiterte System mit üblichen Entwurfsverfahren berechnet werden. Es ist zu beachten, daß die Eingangsmatrix \mathbf{B} ebenso erweitert und mit Nullen aufgefüllt wird.

Eine Störfrequenz f_{St} (in dem Beispiel das Netzbrummen von 50 Hz) kann also folgendermaßen aus dem Meßsignal herausgefiltert werden:

Die Eigenfrequenz eines 1-Massen-Schwingers berechnet sich nach

$$\omega_e = \sqrt{\frac{c}{m}} = 2 \pi f_e$$

c : Federsteifigkeit .

f_e : Eigenfrequenz, gemessen in Hz

Da f_e gleich der Störfrequenz f_{St} sein soll, erhält man, wenn die Masse m gleich 1 gesetzt wird

$$c = (2 \pi f_{St} [\text{Hz}])^2 \quad . \quad (2.67)$$

Die Systemmatrix des 1-Massen-Schwingers in Zustandsraumdarstellung

$$\mathbf{A}_{St} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c & 0 \end{bmatrix} \quad . \quad (2.68)$$

Für den modal transformierten Beobachter (modifizierte Modalform) läßt sich die Erweiterung \mathbf{A}_{St} einfach schreiben als

$$\mathbf{A}_{St} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{St} \\ -\omega_{St} & 0 \end{bmatrix} \quad . \quad (2.69)$$

$$\omega_{St} = 2 \pi f_{St} [\text{Hz}]$$

Als erweiterte Systemgleichung erhält man so

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}}_{St} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{A}_E \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{St} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_{St} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (2.70)$$

bzw. für das modal transformierte System

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{q}_{St} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda & \Lambda_E \\ 0 & \Lambda_{St} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ q_{St} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B^* \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (2.71)$$

Λ_E bzw. Λ_E ist Null, wenn ausschließlich eine Störung des Meßsignals vorliegt, bei einer periodischen Störung des Systems kann die mit Λ_{St} bzw. Λ_{St} künstlich erzeugte Schwingung über eine geeignete Wahl von Λ_E bzw. Λ_E dem System zugeführt werden.

In dem Beispiel, das in den Bildern 2.19 und 2.20 dargestellt ist, sind die Schwingungen eines einseitig eingespannten Biegebalkens beobachtet worden. Der Biegebalken wurde an seinem freien Ende über eine Feder erregt. Das Verfahren zur Anpassung eines Verstärkungsfaktors des Eingangssignals ist in Abschnitt 4.7 beschrieben. Das Meßsignal wurde durch ein 50 Hz Netzbrummen gestört. Bei dem Vergleich der Bilder wird deutlich, daß in diesem Beispiel ein guter Beobachter nur mit dieser Erweiterung zu erreichen ist. Die beschriebene Vorgehensweise läßt sich auch mehrfach anwenden, wenn in dem Störsignal mehrere Frequenzen enthalten sind. Λ_{st} läßt sich auch mit Verfahren zur Beschreibung von farbigem Rauschen durch eine Differentialgleichung mit weißem Rauschen als Eingangssignal (s. /36/) bestimmen.

durchgezogen	: Beobachter	
gestrichelt (lange Striche)	: Meßwert	7. Freiheitsgrad
dünn durchgezogen	: Beobachtungsfehler	Meßzeit : $T = 0.5$ sec

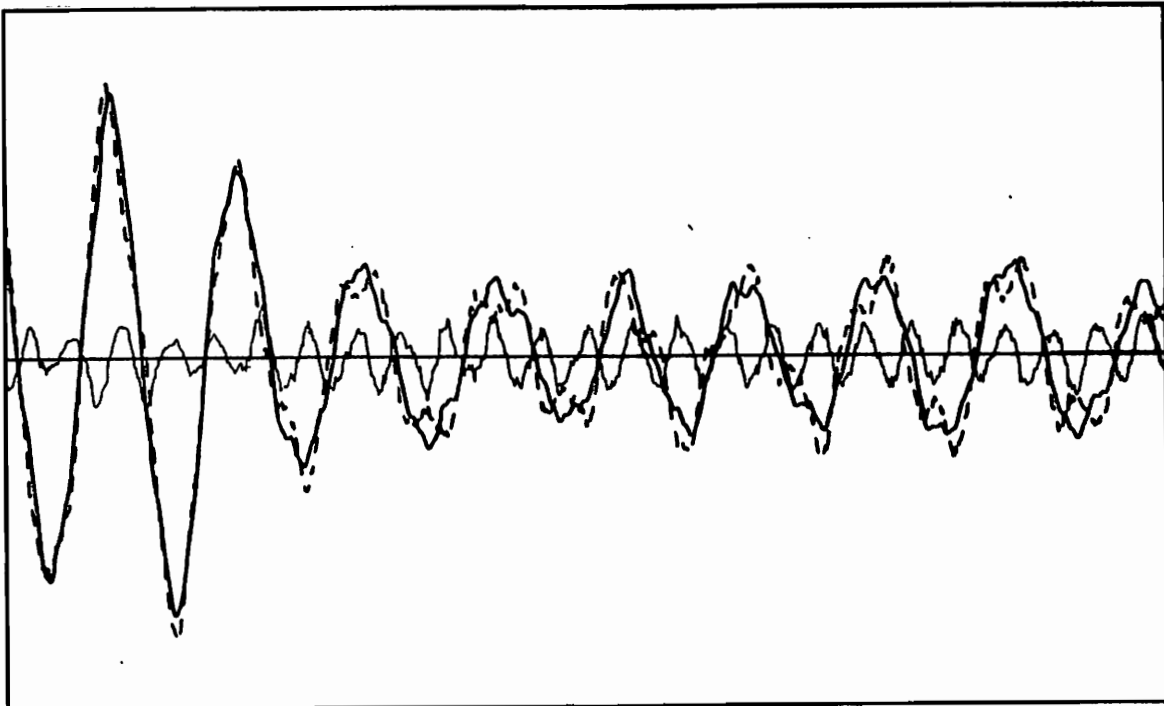


Bild 2.21 Beobachter ohne Formfilter

durchgezogen : Beobachter
gestrichelt (lange Striche) : Meßwert
dünn durchgezogen : Beobachtungsfehler

7. Freiheitsgrad
Meßzeit : $T = 0.5 \text{ sec}$

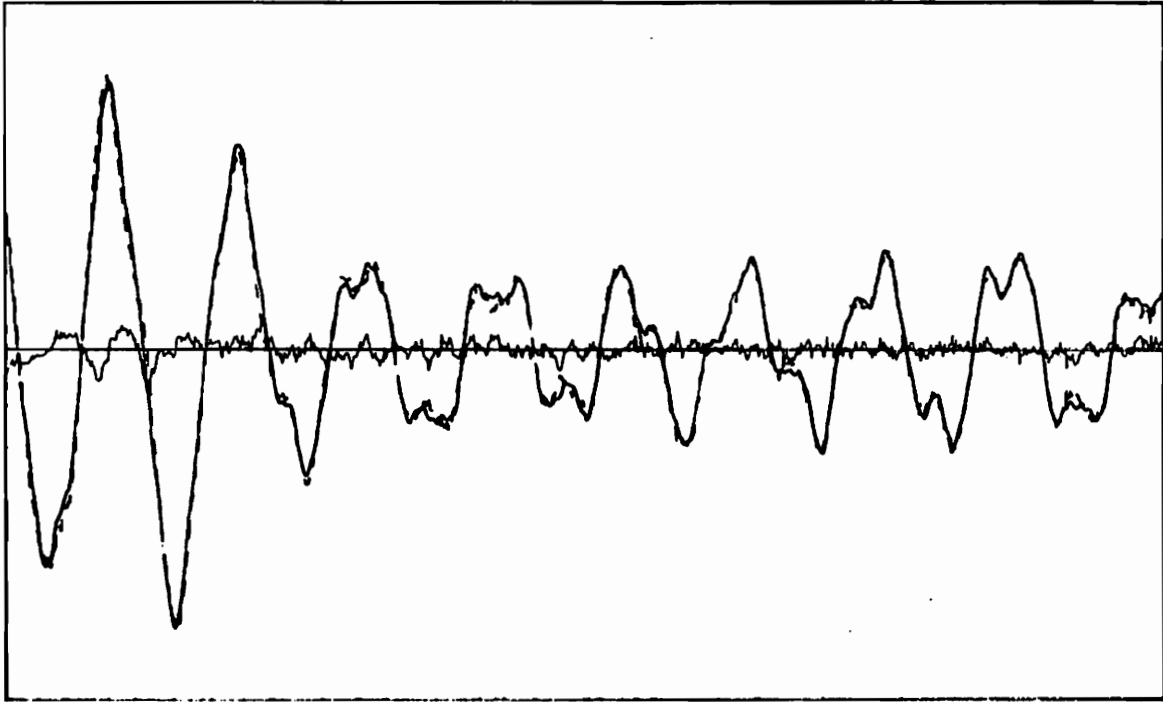


Bild 2.22 Beobachter mit Formfilter

3. Parameterschätzung

3.1 Allgemeines zur Parameterschätzung

Parameterschätzverfahren finden Anwendung in vielen Bereichen. Sie reichen von der Systemidentifikation, die sich häufig auf die Schätzung einzelner Parameter (z.B. Koeffizienten von Übertragungsfunktionen) zurückführen läßt, bis zu den Bereichen Ökonomie, Soziologie. Zahlreiche Verfahren zur Parameterschätzung in Verbindung mit einer Systemidentifikation sind in /37/ bis /54/ zu finden.

Die Aufgabe, die Parameterschätzverfahren zu erfüllen haben, sieht im allgemeinen so aus:

Es liegt ein dynamisches System vor, aus dem **Meßgrößen** gewonnen werden können, die das Verhalten des Systems charakterisieren. Ferner hat man ein **Rechenmodell** des Systems, dessen Struktur bekannt ist, bei dem aber Parameter nicht oder nur sehr ungenau bekannt sind, z.B. Massen, Steifigkeiten, Dämpfungen bei mechanischen Schwingungssystemen oder Mittelwerte, Varianzen bei stochastischen Schwingungen. Die am realen System gemessenen Werte werden nun mit den entsprechenden Größen verglichen, die mit Hilfe des Rechenmodells erzeugt wurden. Die Abweichungen zwischen rechnerisch erzeugten und gemessenen Größen werden als **Schätzfehler** oder **Residuen** bezeichnet.

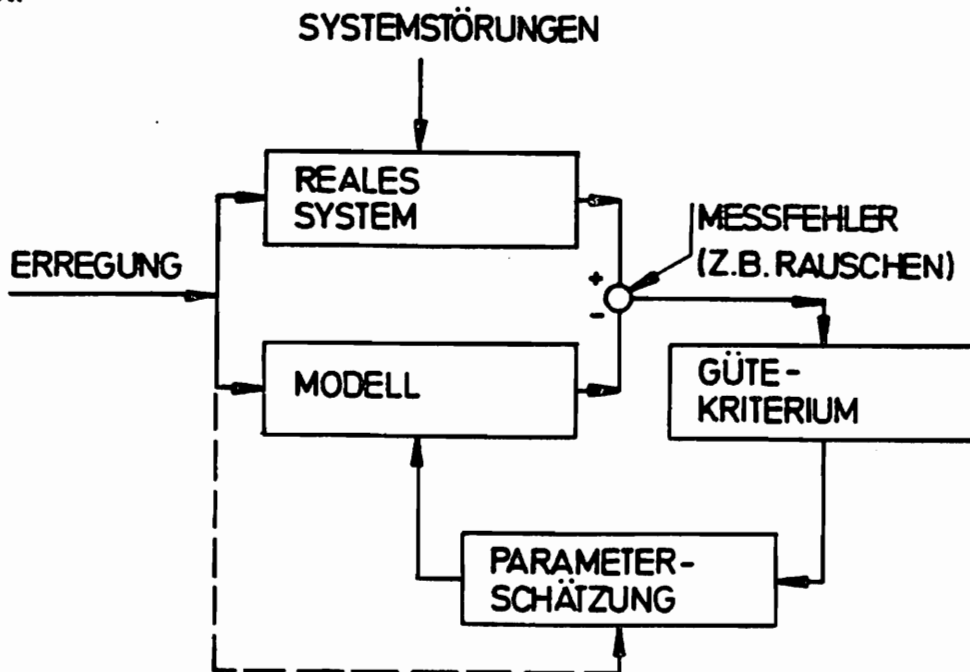


Bild 3.1 Parameterschätzung

Es ist die Aufgabe der Parameterschätzverfahren, die unbekannt Parameter so zu bestimmen, daß die Schätzfehler minimal werden. Um beurteilen zu können, ob ein Minimum vorliegt, muß vorher noch ein **Gütekriterium** festgelegt werden, das die einzelnen Schätzfehler bewertet und zusammenfaßt. Am häufigsten wird die Summe der Quadrate verwendet. Es werden aber auch andere Gütekriterien benutzt, z.B. wird bei der Tscheby-

scheff-Approximation der betragsmäßig größte Fehler minimiert /55/ oder auch stochastische Größen, wie Erwartungswerte und Varianzen des Fehlers werden als Gütekriterium verwendet.

Sollen beispielsweise bei einem Schwingungssystem die Parameter der Übertragungsfunktion geschätzt werden, so kann folgendermaßen vorgegangen werden:

Das System wird zu Schwingungen angeregt. Es werden die Erregung und die Schwingungsantwort gemessen. Anschließend wird durch Simulationsrechnungen die Antwort des Rechenmodells auf die gemessene Erregung bestimmt. Der Schätzfehler ist dann die Abweichung der Schwingungsantworten.

Ein großes Problem bei der Parameterschätzung ist, daß auch die Meßgrößen mit mehr oder weniger großen Fehlern behaftet sind, so daß alleine aus diesem Grund die Schätzfehler nicht zu Null werden können. Außerdem können auf das System Störgrößen wirken, die nicht gemessen werden und somit auch bei den rechnerisch erzeugten Werten nicht berücksichtigt werden können. Sie beeinflussen aber das Systemverhalten und verändern somit die Meßgrößen. Die Berücksichtigung der Meßfehler und Systemstörungen mit ihren charakteristischen Eigenschaften (z.B. weißes oder farbiges Rauschen, unkorreliert oder korreliert) ist neben dem Gütekriterium ein wichtiges Kriterium zur Auswahl eines Parameterschätzverfahrens. Beispielsweise ist die Least-Square-Schätzung (Minimum der Fehlerquadratsumme) nur anzuwenden, wenn unkorreliertes weißes Rauschen als Meßfehler vorausgesetzt wird.

Weitere Probleme, die bei der Anwendung von Parameterschätzverfahren auftreten, sind, daß man eventuell einen Satz von Parametern erhält, der nicht auf ein absolutes Minimum führt, sondern nur auf ein relatives, oder es ist von dem Aufbau des Versuchs her nicht möglich, die gewünschten Informationen aus den gemessenen Daten zu erhalten. Außerdem kann die Ursache dafür, daß die Parameterschätzung nicht zu dem gewünschten Ziel führt, eine falsche Struktur des Rechenmodells sein. Es wurden beispielsweise zu wenig Freiheitsgrade verwendet.

Zunächst werden Schätzverfahren für Systeme behandelt, bei denen der Schätzfehler linear von den zu bestimmenden Parametern abhängt. In Abschnitt 3.3 wird gezeigt, wie diese Verfahren durch Linearisierung des Systems um die jeweils beste Schätzung auch auf nichtlineare Systeme erweitert werden können. Da die Parameterschätzung mit dem Digitalrechner durchgeführt werden soll, werden nur Verfahren für diskrete Meßwerte vorgestellt.

Eine wichtige Eigenschaft zur Beurteilung eines Parameterschätzers ist die **Konsistenz**. Eine Schätzung ist konsistent, wenn bei unendlich vielen Meßwerten der geschätzte Parametervektor in den wirklichen übergeht.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{a}}_N = \mathbf{a} \quad (3.1)$$

\mathbf{a} : wirklicher Parametervektor

$\hat{\mathbf{a}}_N$: mit N Meßwerten geschätzter Parametervektor

Eine weitere wichtige Eigenschaft ist die **Erwartungstreue**,

$$E [\hat{\mathbf{a}}_N] = \mathbf{a} \quad (3.2)$$

d.h. , werden (unendlich) viele Schätzungen mit N-Meßwerten durchgeführt, so muß der Mittelwert gleich dem wirklichen Parametervektor sein. Ist dies nicht der Fall, so sagt man, die Schätzung ist nicht erwartungstreu, verzerrt oder mit einem **Bias** behaftet.

$$E [\mathbf{a}_N] - \mathbf{a} = \Delta \mathbf{a} \quad (3.3)$$

$\Delta \mathbf{a}$: Bias

Es läßt sich zeigen, daß eine konsistente Schätzung stets asymptotisch erwartungstreu ist, aber nicht umgekehrt.

3.2 Methode der gewichteten kleinsten Quadrate

Das meistverwendete Parameterschätzverfahren ist die Methode der gewichteten kleinsten Quadrate. Es ist leicht zu programmieren und führt, wenn nur weißes Rauschen als Meßfehler vorliegt, auf eine erwartungstreue Schätzung. Eine Erweiterung dieser Methode, auch **Least Square** (LS) - Methode genannt, ist die Methode der **Instrumentellen Variable** (IV-Methode), die auch noch gute Ergebnisse liefert, wenn mit dem Eingangssignal korrelierte Meßfehler vorliegen. Da der Rechenaufwand nicht wesentlich größer ist als bei der LS - Methode, wird dies Verfahren auch häufig verwendet. Für eine Anwendung sei auf die Literatur verwiesen, z.B. /37/, /44/, /48/. Hier soll nur die Methode der gewichteten kleinsten Quadrate beschrieben werden (/14/, /55/).

Ausgegangen wird von dem quadratischen Gütekriterium :

$$J = \mathbf{v}^T \mathbf{G} \mathbf{v} \quad (3.4)$$

\mathbf{v} : Vektor der Schätzfehler

\mathbf{G} : Wichtungsmatrix (hermitisch und positiv definit,
meist Diagonalmatrix)

Es wird vorausgesetzt, daß der Schätzfehler linear von den gesuchten Parametern abhängt.

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 - \mathbf{D} \mathbf{v} \mathbf{a} \quad (3.5)$$

\mathbf{a} : Vektor der gesuchten Parameter ($\mathbf{a}^T = |a_1, a_2, \dots, a_M|$)

M : Anzahl der unbekannt Parameter

Die Funktionalmatrix $\mathbf{D} \mathbf{v}$ gibt an, wie empfindlich der Fehlervektor auf eine Änderung des Parametervektors reagiert.

$$\mathbf{D} \mathbf{v} = - \left| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial a_1} \quad \dots \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial a_M} \right| \quad (3.6)$$

Die notwendige Bedingung für ein Minimum des Gütekriteriums J ist :

$$\frac{\partial J}{\partial a_i} = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial a_i} = \frac{\partial \mathbf{v}^T}{\partial a_i} \mathbf{G} \mathbf{v} + \mathbf{v}^T \mathbf{G} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial a_i} = 2 \frac{\partial \mathbf{v}^T}{\partial a_i} \mathbf{G} \mathbf{v} = 0$$

Mit der Definitionsgleichung für die \mathbf{Dv} -Matrix läßt sich die Bedingung für ein Minimum so schreiben:

$$\mathbf{Dv}^T \mathbf{G} \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (3.7)$$

Einsetzen der linearen Beziehung für \mathbf{v} und auflösen nach \mathbf{a} ergibt :

$$\mathbf{a} = (\mathbf{Dv}^T \mathbf{G} \mathbf{Dv})^{-1} \mathbf{Dv}^T \mathbf{G} \mathbf{v}_0 \quad (3.8)$$

Nehmen die Schätzfehler \mathbf{v} komplexe Werte an, so lassen sich diese Gleichungen entsprechend herleiten. Das Gütefunktional hat dann die Form :

$$J = \tilde{\mathbf{v}}^T \mathbf{G} \mathbf{v} , \quad (3.9)$$

($\tilde{}$): konjugiert komplexe Größen

Die Minimumbedingung lautet :

$$\text{Re} (\mathbf{Dv}^T \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{v}}) = \mathbf{0} \quad (3.10)$$

und der Parametervektor \mathbf{a} berechnet sich nach

$$\mathbf{a} = \{ \text{Re} (\mathbf{Dv}^T \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{Dv}}) \}^{-1} \text{Re} (\mathbf{Dv}^T \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{v}}) . \quad (3.11)$$

Die obige Gleichung zur Bestimmung des Parametervektors benötigt, wenn viele Meßwerte, z.B. Zeitfunktionen einzelner Zustandsgrößen vorliegen, sehr viel Speicherplatz. Gerade im Hinblick auf die Anwendung mit Hilfe von Mikrocomputern und für Echtzeitanwendungen ist die rekursive Formulierung der Methode der gewichteten kleinsten Quadrate interessant. Sie ist der oben beschriebenen Form mathematisch äquivalent und ermöglicht es, ausgehend von einer Schätzung mit einer kleinen Anzahl von Meßwerten, die Schätzung mit jedem hinzukommenden Meßwert zu verbessern. Die Herleitung soll für den Sonderfall $\mathbf{G} = \mathbf{I}$ durchgeführt werden.

$$J = \mathbf{v}^T \mathbf{v} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{a} = (\mathbf{Dv}^T \mathbf{Dv})^{-1} \mathbf{Dv}^T \mathbf{v}_0 \quad (3.13)$$

Zunächst wird \mathbf{a} mit den ersten N_0 Meßwerten berechnet, wobei N_0 größer als die Anzahl der unbekannt Parameter M sein sollte ($N_0 \geq M$). Es soll nun die Schätzung durch die $(N+1)$ -te Messung nachkorrigiert werden, wenn schon n Messungen vorhanden sind ($N \geq N_0$). Mit den Größen

$$\mathbf{v}_N = \left| v_1, \dots, v_i, \dots, v_N \right|^T \quad (3.14)$$

v_i : Schätzfehler des i -ten Meßwertes

\mathbf{v}_N : Fehlervektor, berechnet mit N Meßwerten

$$D\mathbf{v}_N = \left[\frac{\partial \mathbf{v}_N}{\partial a_1} \quad \dots \quad \frac{\partial \mathbf{v}_N}{\partial a_M} \right]$$

\mathbf{a}_N : Parametervektor, der mit N Meßwerten berechnet wurde (s. Gl. 3.13)

$$(\mathbf{v}(\mathbf{a}_N)) = \mathbf{0} = \mathbf{v}_N - D\mathbf{v}_N \mathbf{a}_N$$

berechnet sich \mathbf{a}_{N+1} nach

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{N+1} &= (D\mathbf{v}_{N+1}^T D\mathbf{v}_{N+1})^{-1} D\mathbf{v}_{N+1}^T \mathbf{v}_{N+1} \\ &= \left(\left[D\mathbf{v}_N^T, d\mathbf{v}_{N+1}^T \right] \left| \begin{array}{c} D\mathbf{v}_N \\ d\mathbf{v}_{N+1} \end{array} \right| \right)^{-1} \left| \begin{array}{c} D\mathbf{v}_N^T, d\mathbf{v}_{N+1}^T \\ \mathbf{v}_N \\ v_{N+1} \end{array} \right| \\ &= \Theta_{N+1} \left| \begin{array}{c} D\mathbf{v}_N^T, d\mathbf{v}_{N+1}^T \\ \mathbf{v}_N \\ v_{N+1} \end{array} \right| \\ &= \Theta_{N+1} (D\mathbf{v}_N^T D\mathbf{v}_N \mathbf{a}_N + d\mathbf{v}_{N+1}^T v_{N+1}) \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\Theta_N = (D\mathbf{v}_N^T D\mathbf{v}_N)^{-1}$$

$$d\mathbf{v}_{N+1} = \left| \frac{\partial v_{N+1}}{\partial a_1}, \dots, \frac{\partial v_{N+1}}{\partial a_M} \right|$$

Θ_{N+1} läßt sich nun folgendermaßen aus Θ_N berechnen:

Mit der allgemein gültigen Rechenregel für nichtsinguläre Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{C}

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{C} \mathbf{D})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{D} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{D} \mathbf{A}^{-1}$$

gilt

$$\begin{aligned} \Theta_{N+1} &= \left(\left[D\mathbf{v}_N^T, d\mathbf{v}_{N+1}^T \right] \left| \begin{array}{c} D\mathbf{v}_N \\ d\mathbf{v}_{N+1} \end{array} \right| \right)^{-1} = (D\mathbf{v}_N^T D\mathbf{v}_N + d\mathbf{v}_{N+1}^T d\mathbf{v}_{N+1})^{-1} \\ &= \Theta_N - \Theta_N d\mathbf{v}_{N+1}^T (1 + d\mathbf{v}_{N+1} \Theta_N d\mathbf{v}_{N+1}^T)^{-1} d\mathbf{v}_{N+1} \Theta_N \\ &= \Theta_N - \frac{\Theta_N d\mathbf{v}_{N+1}^T d\mathbf{v}_{N+1} \Theta_N}{1 + d\mathbf{v}_{N+1} \Theta_N d\mathbf{v}_{N+1}^T} \end{aligned}$$

Mit

$$K_{N+1} = \frac{\Theta_N \mathbf{d}v_{N+1}^T}{1 + \mathbf{d}v_{N+1}^T \Theta_N \mathbf{d}v_{N+1}}$$

läßt sich Θ_{N+1} schreiben als

$$\Theta_{N+1} = \Theta_N - K_{N+1} \mathbf{d}v_{N+1} \Theta_N$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{N+1} &= (\Theta_N - K_{N+1} \mathbf{d}v_{N+1} \Theta_N) (\mathbf{D}v_N \mathbf{D}v_N^T \mathbf{a}_N + \mathbf{d}v_{N+1}^T v_{N+1}) \\ &= \mathbf{a}_N + \Theta_N \mathbf{d}v_{N+1}^T v_{N+1} - K_{N+1} \mathbf{d}v_{N+1} \mathbf{a}_N - K_{N+1} \mathbf{d}v_{N+1} \Theta_N \mathbf{d}v_{N+1}^T v_{N+1} \end{aligned}$$

mit

$$\Theta_N \mathbf{d}v_{N+1}^T = K_{N+1} (1 + \mathbf{d}v_{N+1}^T \Theta_N \mathbf{d}v_{N+1})$$

wird daraus

$$\mathbf{a}_{N+1} = \mathbf{a}_N + K_{N+1} (v_{N+1} + \mathbf{d}v_{N+1} \Theta_N \mathbf{d}v_{N+1}^T v_{N+1} - \mathbf{d}v_{N+1} \mathbf{a}_N - \mathbf{d}v_{N+1} \Theta_N \mathbf{d}v_{N+1}^T v_{N+1})$$

Man erhält somit folgende rekursive Formulierung des Least-Square Algorithmus:

$$K_{N+1} = \frac{\Theta_N \mathbf{d}v_{N+1}^T}{1 + \mathbf{d}v_{N+1}^T \Theta_N \mathbf{d}v_{N+1}} \quad (3.16)$$

$$\mathbf{a}_{N+1} = \mathbf{a}_N + K_{N+1} (v_{N+1} - \mathbf{d}v_{N+1} \mathbf{a}_N) \quad (3.17)$$

$$\Theta_{N+1} = \Theta_N - K_{N+1} \mathbf{d}v_{N+1} \Theta_N \quad (3.18)$$

für $N \geq N_0 \geq M$. Startwerte für N_0 erhält man nach der Gleichung

$$\mathbf{a}_{N_0} = \Theta_{N_0} \mathbf{D}v_{N_0}^T v_{N_0} \quad (3.19)$$

$$\Theta_{N_0} = (\mathbf{D}v_{N_0}^T \mathbf{D}v_{N_0})^{-1}$$

Es werden nun noch einige nützliche Erweiterungen dieses rekursiven Least-Square Algorithmus angegeben. Die Herleitungen sind z.B. in /14/ nachzulesen.

Sollen die einzelnen Messungen unterschiedlich gewichtet werden, so erhält man die rekursive Form der Methode der gewichteten kleinsten Quadrate mit

$$\mathbf{G} = \text{diag} \left| g_1, g_2, \dots, g_J \right| \quad (3.20)$$

J : Gesamtanzahl der Messungen

$$\mathbf{K}_{N+1} = \frac{g_{N+1} \boldsymbol{\Theta}_N \mathbf{d}v_{N+1}^T}{1 + g_{N+1} \mathbf{d}v_{N+1} \boldsymbol{\Theta}_N \mathbf{d}v_{N+1}^T} \quad (3.21)$$

$$\mathbf{a}_{N+1} = \mathbf{a}_N + \mathbf{K}_{N+1} (v_{N+1} - \mathbf{d}v_{N+1} \mathbf{a}_N) \quad (3.22)$$

$$\boldsymbol{\Theta}_{N+1} = \boldsymbol{\Theta}_N - \mathbf{K}_{N+1} \mathbf{d}v_{N+1} \boldsymbol{\Theta}_N \quad (3.23)$$

Startwerte:

$$\mathbf{a}_{N_0} = \boldsymbol{\Theta}_{N_0} \mathbf{D}v_{N_0}^T \mathbf{G}_{N_0} v_{N_0} \quad (3.24)$$

$$\boldsymbol{\Theta}_{N_0} = (\mathbf{D}v_{N_0}^T \mathbf{G}_{N_0} \mathbf{D}v_{N_0})^{-1}$$

Für zeitveränderliche Systeme, bei denen die Schätzung über eine längere Zeit erfolgen soll, ist es sinnvoll, zurückliegende Werte nicht so stark zu wichten, wie die aktuellen. Der folgende Algorithmus bewirkt eine exponentiell abfallende Wichtung zurückliegender Meßwerte. Das Gütekriterium lautet dann:

$$J_{N+1} = \alpha J_N + v_{N+1}^2 \quad (3.25)$$

Der Parametervektor \mathbf{a} berechnet sich mit den Gleichungen

$$\mathbf{K}_{N+1} = \frac{\boldsymbol{\Theta}_N \mathbf{d}v_{N+1}^T}{\alpha + \mathbf{d}v_{N+1} \boldsymbol{\Theta}_N \mathbf{d}v_{N+1}^T} \quad (3.26)$$

$$\mathbf{a}_{N+1} = \mathbf{a}_N + \mathbf{K}_{N+1} (v_{N+1} - \mathbf{d}v_{N+1} \mathbf{a}_N) \quad (3.27)$$

$$\boldsymbol{\Theta}_{N+1} = \frac{1}{\alpha} (\boldsymbol{\Theta}_N - \mathbf{K}_{N+1} \mathbf{d}v_{N+1} \boldsymbol{\Theta}_N) \quad (3.28)$$

3.3 Parameterschätzung bei nichtlinearen Systemen

Die bisher beschriebenen Verfahren setzen eine lineare Beziehung zwischen den unbekannt Parametern und den Schätzfehlern voraus. Diese Voraussetzung ist in der Regel nicht gegeben. Durch die Linearisierung dieser Beziehung um die jeweils beste Schätzung für den Parametervektor \mathbf{a} und Anwendung des nachfolgend beschriebenen Iterationsalgorithmus lassen sich diese Verfahren auch anwenden, wenn die Beziehung zwischen den Schätzfehlern und den unbekannt Parametern nichtlinear ist.

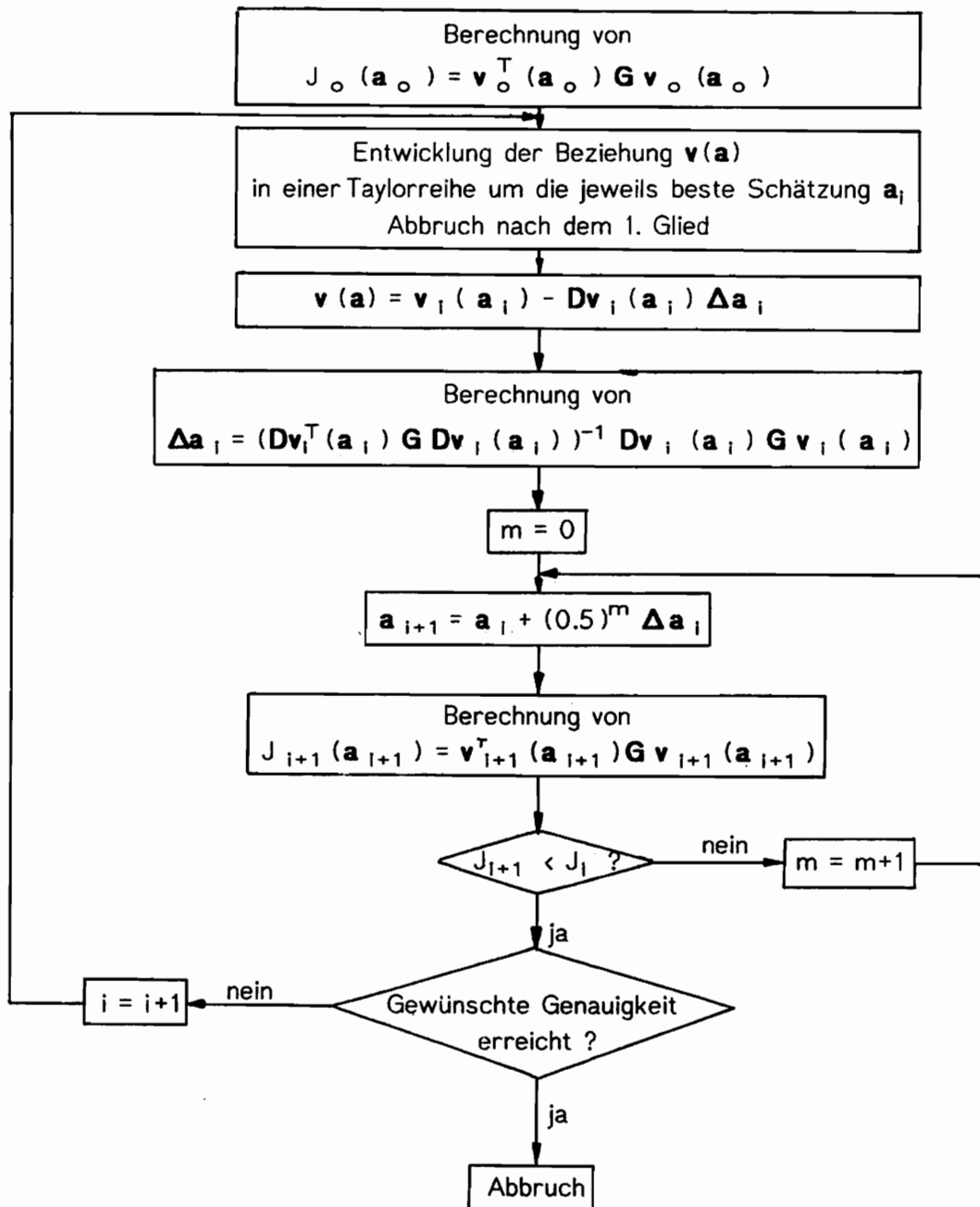


Bild 3.2 : Iterationsalgorithmus zur Optimierung der Korrekturparameter (Vektor \mathbf{a})

Es wird ausgegangen von einem Parametervektor \mathbf{a}_0 , durch den das aus Vorabkenntnissen gewonnene Rechenmodell dargestellt wird. Mit diesem Parametervektor läßt sich der Vektor der Schätzfehler \mathbf{v} und der Wert des Gütekriteriums bestimmen. Anschließend linearisiert man die Beziehung $\mathbf{v}(\mathbf{a})$ um die beste Schätzung für den Parametervektor \mathbf{a} , indem sie in einer Taylorreihe entwickelt und nach dem 1. Glied abgebrochen wird.

$$\mathbf{v}(\mathbf{a}_{i+1}) = \mathbf{v}(\mathbf{a}_i) - \mathbf{Dv} \cdot \Delta \mathbf{a} \quad (3.29)$$

$$\mathbf{Dv} = \left| -\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial a_1} \quad \dots \quad -\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial a_M} \right|$$

Mit dieser linearisierten Beziehung kann dann, z.B. mit dem in Abschnitt 3.1 beschriebenen Verfahren, ein Vektor $\Delta \mathbf{a}_i$ berechnet werden. Es muß nur

$$\begin{array}{l} \mathbf{a} \text{ durch } \Delta \mathbf{a} \quad \text{und} \\ \mathbf{v}_0 \text{ durch } \mathbf{v}(\mathbf{a}_i) \end{array}$$

ersetzt werden. Man erhält so eine neue Schätzung für den Parametervektor \mathbf{a} nach der Gleichung

$$\mathbf{a}_{i+1} = \mathbf{a}_i + \Delta \mathbf{a}_i$$

Dieser Parametervektor wird in das Rechenmodell eingesetzt, der Fehler im Sinne des Gütekriteriums bestimmt und überprüft, ob er kleiner geworden ist. Ist dies der Fall, so wird um die jetzt bessere Schätzung für \mathbf{a} linearisiert. Da die Beziehung $\mathbf{v}(\mathbf{a})$ oftmals stark nichtlinear ist, kann es vorkommen, daß $\Delta \mathbf{a}$ zwar die richtige Richtung bestimmt, in der das Minimum zu suchen ist, aber vom Betrag her zu groß ist und so der Fehler mit dem neuen Parametervektor größer wird. Hierfür ist bei der Programmierung dieses Verfahrens die innere Schleife eingeführt worden (s. Bild 3.2), in der die Schrittweite solange halbiert wird, bis der Fehler kleiner geworden ist. Dies ist in der Regel nach 1 bis 2 Durchgängen der Fall.

Für diese Optimierung muß bekannt sein:

1. wie der Fehlervektor vom Parametervektor abhängt, d.h. die Beziehung $\mathbf{v}(\mathbf{a})$
2. die Funktionalmatrix \mathbf{Dv} , die die Ableitungen des Fehlervektors nach den Korrekturparametern enthält.

3.4 Maximum-Likelihood-Schätzung

Während die Methode der kleinsten Quadrate gute Ergebnisse liefert, wenn der Schätzfehler linear von den zu schätzenden Parametern abhängt und als Störung nur weißes Rauschen vorliegt, ermöglicht die Maximum-Likelihood-Methode bei beliebigen Systemen und allgemeineren Störungen eine Parameterschätzung (s. z.B. /47/, /56/). Voraussetzung ist allerdings, daß die statistischen Eigenschaften der Störungen, wie die

Verteilungsfunktion, Mittelwert und Streuung bekannt sind. Die vorliegenden Meßwerte werden als stochastische Größen aufgefaßt, für die eine Wahrscheinlichkeitsverteilung (bzw. deren Ableitung, die Dichtefunktion) angesetzt wird, bei der noch einige Parameter unbekannt sind. Die Parameter können Systemparameter sein, aber auch statistische Größen, z.B. Mittelwert, Varianz. Mit der Maximum-Likelihood-Schätzung werden diese Parameter so bestimmt, daß die vorliegenden Meßwerte eine möglichst große Wahrscheinlichkeit erhalten. Für jeden Meßwert \mathbf{x}_i wird eine Dichteverteilungsfunktion \mathbf{f} (z.B. Normal-, Weibull-, Studentverteilung) angesetzt.

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i, a_1, a_2, \dots, a_M) \quad i = 1, \dots, N \quad (3.30)$$

N : Anzahl der Meßwerte

M : Anzahl der unbekannt Parameter

Dann lautet die Likelihoodfunktion:

$$L = f(\mathbf{x}_1, a_1, \dots, a_M) \cdot \dots \cdot f(\mathbf{x}_i, a_1, \dots, a_M) \cdot \dots \cdot f(\mathbf{x}_N, a_1, \dots, a_M) \quad (3.31)$$

Die Parameter a_j sollen so bestimmt werden, daß L maximal wird. Die notwendige Bedingung für ein Maximum lautet:

$$\frac{\partial L}{\partial a_j} \stackrel{!}{=} 0 \quad (3.32)$$

oder, was häufig leichter zu berechnen und mathematisch gleichwertig ist

$$\frac{\partial (\ln(L))}{\partial a_j} = \frac{1}{L} \cdot \frac{\partial L}{\partial a_j} \stackrel{!}{=} 0 \quad (3.33)$$

Die Vorgehensweise bei der Maximum-Likelihood-Schätzung läßt sich am leichtesten an einem Beispiel erläutern. Es liegen N Meßwerte \mathbf{x}_i vor, die zu den Zeitpunkten $t_i = i \cdot \Delta t$ ($i = 1, \dots, N$) gewonnen wurden. Außerdem hat man ein mathematisches Modell für die entsprechenden Größen des Systems der Form

$$\hat{\mathbf{x}}_i = \hat{\mathbf{x}}_i + \boldsymbol{\xi}_i \quad (3.34a)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_i = \hat{\mathbf{x}}_i(\mathbf{x}_z, \mathbf{a}) \quad z = 1, \dots, i-1 \quad (3.34b)$$

\mathbf{a} : gesuchter Parametervektor

$\boldsymbol{\xi}_i$: Vektor der Störung (weißes Rauschen)

\mathbf{x}_z : zurückliegende Meßwerte

$\hat{\mathbf{x}}_i$: mit mathematischem Modell geschätzte Zustandsgrößen ohne Berücksichtigung des Rauschens

$\hat{\mathbf{x}}_i$: mit mathematischem Modell geschätzte Zustandsgrößen mit Berücksichtigung des Rauschens

bei dem noch die Parameter a_j (zusammengefaßt in dem Vektor \mathbf{a}) bestimmt werden müssen. Da als Störung weißes Rauschen angenommen wurde, ist der Mittelwert der Störung Null.

Es gilt also für den Mittelwert

$$\boldsymbol{\mu}_i = E [\hat{\mathbf{x}}_i] = E [\hat{\tilde{\mathbf{x}}}_i(\mathbf{x}_z, \mathbf{a})] + E [\boldsymbol{\xi}_i] = \hat{\tilde{\mathbf{x}}}_i(\mathbf{x}_z, \mathbf{a}) \quad (3.35)$$

und für die Streuung

$$\boldsymbol{\Sigma}_i = E [\boldsymbol{\xi}_i^T \boldsymbol{\xi}_i] = \boldsymbol{\Sigma} \quad (3.36)$$

Setzt man die Störung normalverteilt an, so ergibt sich mit Hilfe des mathematischen Modells für jeden Meßwert \mathbf{x}_i eine Verteilungsdichtefunktion der Form

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_i, \mathbf{a}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi \det(\boldsymbol{\Sigma})}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_i)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_i)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi \det(\boldsymbol{\Sigma})}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_i - \hat{\tilde{\mathbf{x}}}_i(\mathbf{x}_z, \mathbf{a}))^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}_i - \hat{\tilde{\mathbf{x}}}_i(\mathbf{x}_z, \mathbf{a}))} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Die Likelihoodfunktion ist das Produkt der Dichtefunktionen aller Meßwerte:

$$\begin{aligned} L &= \prod_{i=1}^N f(\mathbf{x}_i, \mathbf{a}) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi \det(\boldsymbol{\Sigma})}} \right)^N e^{-\frac{1}{2} \{ (\mathbf{x}_1 - \hat{\tilde{\mathbf{x}}}_1)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}_1 - \hat{\tilde{\mathbf{x}}}_1) + \dots + (\mathbf{x}_N - \hat{\tilde{\mathbf{x}}}_N)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}_N - \hat{\tilde{\mathbf{x}}}_N) \}} \end{aligned} \quad (3.38)$$

Die notwendige Bedingung für den optimalen Parametervektor, d.h. den Parametervektor, bei dem sich für die Meßwerte die größte Wahrscheinlichkeit im Sinne der Likelihoodfunktion L ergibt, (s. Bild 3.3) lautet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\ln L)}{\partial a_j} &= 2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{\tilde{\mathbf{x}}}_1(\mathbf{a}, \mathbf{x}_0)}{\partial a_j} \right)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x}_1 - \hat{\tilde{\mathbf{x}}}_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{a})) \\ &+ \dots + 2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{\tilde{\mathbf{x}}}_i(\mathbf{a}, \mathbf{x}_z)}{\partial a_j} \right)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x}_i - \hat{\tilde{\mathbf{x}}}_i(\mathbf{x}_z, \mathbf{a})) \\ &+ \dots + 2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{\tilde{\mathbf{x}}}_M(\mathbf{a}, \mathbf{x}_z)}{\partial a_j} \right)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x}_M - \hat{\tilde{\mathbf{x}}}_M(\mathbf{x}_z, \mathbf{a})) \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned} \quad (3.39)$$

Für den Sonderfall einer linearen Beziehung zwischen Meßwert und Parametervektor

$$\mathbf{v}^T = |(\hat{x}_1 - \mathbf{x}_1)^T, \dots, (\hat{x}_i - \mathbf{x}_i)^T, \dots, (\hat{x}_i - \mathbf{x}_i)^T|$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v} - \mathbf{Dv} \mathbf{a}$$

$$\mathbf{Dv} = - \left| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial a_1}, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial a_2}, \dots, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial a_j} \right|$$

ergibt sich

$$\mathbf{Dv}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{v} - \mathbf{Dv} \mathbf{a}) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{a} = (\mathbf{Dv}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{Dv})^{-1} \mathbf{Dv}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{v}_0 \quad (3.40)$$

In diesem Fall ist die Maximum-Likelihood-Schätzung gleich der Methode der gewichteten kleinsten Quadrate, wenn als Wichtungsmatrix die inverse Varianzmatrix als Meßfehler genommen wird.

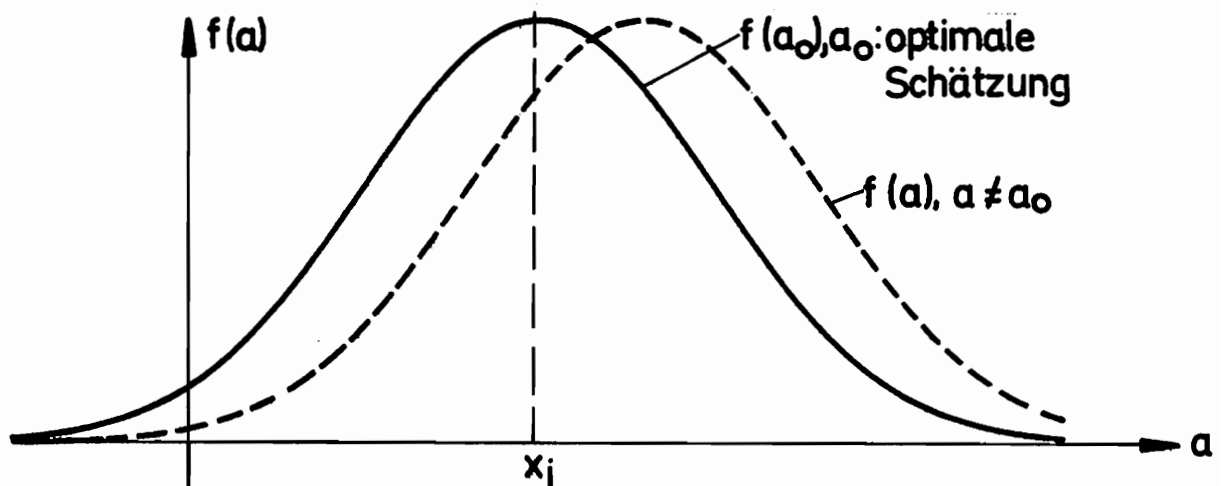


Bild 3.3 Optimale und nichtoptimale Dichtefunktion der Maximum-Likelihood-Schätzung für einen Meßwert x_i

3.5. Schätzung von Korrekturparametern der Steifigkeitsmatrix bei gemessenen Eigenfrequenzen

In diesem Abschnitt soll davon ausgegangen werden, daß die Eigenfrequenzen des realen Systems bekannt sind. Zur Bestimmung dieser Eigenfrequenzen aus Meßwerten gibt es zahlreiche Verfahren im Zeit- und im Frequenzbereich (s. z.B. /49/, /50/, /51/, /58 / bis /60/). Hier sei nur auf die zwei Verfahren hingewiesen, die bei den in den Abschnitten 6 und 7 beschriebenen Versuchen an einem einseitig eingespannten Balken und an einer rotierenden Welle verwendet wurden. Es handelt sich um das im Anhang beschriebene Verfahren von D. Bouchard zur direkten Identifikation der Eigenschwingungsparameter (Frequenz, Dämpfung, Phase, Amplitude) aus freien Schwingungen des Systems und um

die in Abschnitt 4 beschriebene Möglichkeit zur Bestimmung von Eigenfrequenzen und Dämpfungen durch eine Minimierung des Beobachtungsfehlers.

Beim Vergleich zwischen gerechneten und gemessenen Eigenfrequenzen fallen häufig erhebliche Unterschiede auf. Die Ursache kann entweder in einem ungenauen Rechenmodell zu suchen sein, oder, falls das Rechenmodell zu Beginn einer längeren Schwingungsüberwachung eine bessere Übereinstimmung zeigte, kann eine Veränderung des realen Systems gegenüber seinem Ausgangszustand eine solche Abweichung der Eigenfrequenzen verursachen. In diesem Fall ist interessant, den Grund dafür festzustellen. Ist die Ursache eine verringerte Steifigkeit eines Bauteils (z.B. RiB), dann ist dies Bauteil zu lokalisieren.

Da es unmöglich ist, die vielen einzelnen Koeffizienten der Gesamtsteifigkeits- und Gesamtmassenmatrix mit den wenigen Meßwerten, die zur Verfügung stehen, sinnvoll anzupassen, schlägt Natke vor, das Rechenmodell zu Substrukturen aufzuteilen, diese mit Korrekturparametern zu versehen, und die Parameter optimal an die Messungen anzupassen. (s. / 40/). Da die Massenmatrix normalerweise relativ gut bekannt ist, soll hier nur gezeigt werden, wie die Steifigkeitsmatrix so verändert werden kann, daß gemessene und gerechnete Eigenfrequenzen möglichst gut übereinstimmen. Es wird folgender Ansatz für die Steifigkeitsmatrix gemacht:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \sum a_j \mathbf{K}_j \quad (3.42)$$

\mathbf{K}_0 : als exakt vorausgesetzte Steifigkeiten (\mathbf{K}_0 wird nicht verändert)

\mathbf{K}_j : Steifigkeiten der Substrukturen

a_j : Korrekturparameter der Substrukturen

Die Korrekturparameter werden in dem Vektor

$$\mathbf{a}^T = | a_1, \dots, a_j, \dots, a_j |$$

zusammengefaßt. Die Anpassung der Steifigkeitsmatrix an die gemessenen Eigenfrequenzen, d.h. die Minimierung zwischen gerechneten und gemessenen Eigenfrequenzen, soll nach der Methode der gewichteten kleinsten Quadrate erfolgen. Das Gütekriterium hat dann die Form

$$J = \mathbf{v}^T \mathbf{G} \mathbf{v}$$

In den Fehlervektor \mathbf{v} wird zusätzlich zur Abweichung der Eigenfrequenzen noch die Abweichung der angepaßten Korrekturparameter \mathbf{a} von dem aus Vorabkenntnissen gewonnenen Rechenmodell aufgenommen. Dadurch läßt sich bei geeigneter Wahl der Gewichtsmatrix verhindern, daß sich das angepaßte Rechenmodell allzu stark von dem Ausgangsmodell entfernt. Es läßt sich so auch Vorabinformation darüber in die Parameteranpassung einbeziehen, welche Parameter genau bekannt sind und welche nicht. So wurden z.B. bei der Anpassung eines Rechenmodells einer Kraftwerksturbine die Abweichung der Korrekturfaktoren der Wellensteifigkeiten, die relativ genau bekannt sind,

hoch gewichtet, während die Abweichung der Gleitlagersteifigkeiten von den Ausgangswerten gering gewichtet wurden. Die Steifigkeiten der Gleitlager sind nur sehr schlecht zu berechnen, so daß hier größere Änderungen zugelassen werden konnten. Außerdem wird die Parameteranpassung durch diese Erweiterung numerisch stabiler.

Um den Optimierungsalgorithmus nach Abschnitt 3.3 (s. Bild 3.2) anwenden zu können, muß die Funktionsmatrix Dv der Ableitung des Fehlervektors nach den Korrekturparametern bestimmt werden.

Zunächst soll die Herleitung für ein **ungedämpftes System** erfolgen. Die Eigenvektoren Φ_i des Systems

$$M \ddot{\xi} + K \xi = 0$$

mit dem Eigenwertproblem

$$(K - \omega_i^2 M) \Phi_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N_{\text{ges}}$$

lassen sich so normieren, daß gilt:

$$\Phi_i^T M \Phi_i = 1 \quad , \text{ bzw. } \quad \Phi_i^T K \Phi_i = \omega_i^2$$

Werden in dem Fehlervektor die Quadrate der Eigenfrequenzen verglichen,

$$v^T = | \hat{\omega}_1^2 - \omega_1^2, \dots, \hat{\omega}_1^2 - \omega_1^2, \dots, \hat{\omega}_N^2 - \omega_N^2, \hat{a}_1 - a_1, \dots, \hat{a}_j - a_j, \dots, \hat{a}_j - a_j | \quad (3.41)$$

- $\hat{\omega}_i$: Eigenfrequenzen des Rechenmodells
- ω_i : gemessene Eigenfrequenzen
- N : Anzahl der gemessenen Eigenfrequenzen
- \hat{a}_j : Parameter des aus Vorabinformationen gewonnenen Rechenmodells
(meist $\hat{a}_j = 1$)

dann läßt sich die Dv - Matrix leicht aus der Beziehung der normierten Eigenvektoren bestimmen.

$$Dv_{ij}^{\omega} = - \frac{\partial (\hat{\omega}_i^2 - \omega_i^2)}{\partial a_j} = - \Phi_i^T K_j \Phi_i$$

$$Dv_{ij}^a = - \frac{\partial (\hat{a}_l - a_l)}{\partial a_j} = \delta_{lj} \quad , \quad \delta_{lj} = \begin{cases} 0 & \text{für } l \neq j \\ 1 & \text{für } l = j \end{cases}$$

$$Dv = \begin{vmatrix} Dv^{\omega} \\ Dv^a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\Phi_1^T K_1 \Phi_1 & \dots & -\Phi_1^T K_J \Phi_1 \\ -\Phi_N^T K_1 \Phi_N & \dots & -\Phi_N^T K_J \Phi_N \\ & -1 & & & 0 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 & & & -1 \end{vmatrix} \quad (3.44)$$

Sollen prozentual gleiche Abweichungen der Frequenzen gleiche Anteile im Fehlerfunktional ergeben, so ist \mathbf{G} in diesem Bereich als Diagonalmatrix zu wählen mit Werten proportional zu $1/\omega_i^4$ auf der Hauptdiagonalen. Sofern statistische Eigenschaften über die Fehler bei der Bestimmung von ω_i^2 bekannt sind, kann \mathbf{G} im Bereich der Frequenzabweichungen auch als inverse Varianzmatrix der Meßfehler gewählt werden.

Bei einem viskos gedämpften System mit

$$\mathbf{M} \ddot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{D} \dot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{K} \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$$

lautet das Eigenwertproblem

$$(\hat{\lambda}_i^2 \mathbf{M} + \hat{\lambda}_i \mathbf{D} + \mathbf{K}) \boldsymbol{\Phi}_i = \mathbf{0} \quad . \quad i = 1, 2, \dots, 2N_{\text{ges}}$$

N_{ges} : Anzahl der Systemfreiheitsgrade

Man erhält damit $2N$ konjugierte komplexe Eigenwerte λ_i und Eigenvektoren $\boldsymbol{\Phi}_i$, die sich anders als bei dem ungedämpften System nach der Gleichung

$$2\hat{\lambda}_i \boldsymbol{\Phi}_i^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi}_i + \boldsymbol{\Phi}_i^T \mathbf{D} \boldsymbol{\Phi}_i = 1 \quad , \text{ bzw}$$

$$\hat{\lambda}_i^2 \boldsymbol{\Phi}_i^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi}_i - \boldsymbol{\Phi}_i^T \mathbf{K} \boldsymbol{\Phi}_i = \hat{\lambda}_i$$

normieren lassen. Der Fehlervektor läßt sich hier schreiben als

$$\mathbf{v}^T = \left| \hat{\omega}_1 - \omega_1, \dots, \hat{\omega}_1 - \omega_1, \dots, \hat{\omega}_N - \omega_N, \hat{a}_1 - a_1, \dots, \hat{a}_j - a_j, \dots, \hat{a}_J - a_J \right| \quad (3.43)$$

ω_i : gemessene Eigenfrequenzen

$\hat{\omega}_i$: gerechnete Eigenfrequenzen

oder falls die Dämpfung auch angepaßt werden soll, gilt

$$\mathbf{v}^T = \left| \hat{\omega}_1 - \omega_1, \dots, \hat{\omega}_1 - \omega_1, \dots, \hat{\omega}_N - \omega_N, \hat{\delta}_1 - \delta_1, \dots, \hat{\delta}_1 - \delta_1, \dots, \hat{\delta}_N - \delta_N, \right. \\ \left. \hat{a}_1 - a_1, \dots, \hat{a}_j - a_j, \dots, \hat{a}_J - a_J \right| \quad (3.44)$$

δ_i : gemessene Dämpfungen

$\hat{\delta}_i$: gerechnete Dämpfungen

Die Ableitung der komplexen Eigenwerte $\hat{\lambda}_i$ nach den Korrekturparametern a_j läßt sich mit Hilfe der Differentiation des Eigenwertproblems nach den a_j berechnen.

$$\frac{\partial}{\partial a_j} \{ (\hat{\lambda}_i^2 \mathbf{M} + \hat{\lambda}_i \mathbf{D} + \mathbf{K}) \boldsymbol{\Phi}_i \} = \mathbf{0} \quad . \quad i = 1, 2, \dots, 2N_{\text{ges}}$$

Unter Vernachlässigung der Abhängigkeit der Eigenvektoren von den Korrekturparametern erhält man

$$\left(2 \hat{\lambda}_i \frac{\partial \hat{\lambda}_i}{\partial a_j} \mathbf{M} + \frac{\partial \hat{\lambda}_i}{\partial a_j} \mathbf{D} + \mathbf{K}_j \right) \Phi_i = \mathbf{0} \quad .$$

Umgeformt und nach Vormultiplikation mit Φ_i^T ergibt sich :

$$\left(2 \lambda_i \Phi_i^T \mathbf{M} \Phi_i + \Phi_i^T \mathbf{D} \Phi_i \right) \frac{\partial \hat{\lambda}_i}{\partial a_j} + \Phi_i^T \mathbf{K}_j \Phi_i = 0$$

da der erste Term nach der Normierungsgleichung der Eigenvektoren gleich 1 ist, folgt :

$$D\lambda_{ij} = - \frac{\partial \hat{\lambda}_i}{\partial a_j} = \Phi_i^T \mathbf{K}_i \Phi_i$$

Mit $D\lambda$ läßt sich die Funktionalmatrix $D\omega$ der Ableitung des Frequenzfehlers nach den Korrekturparametern bzw. die Ableitung des Fehlers zwischen gemessenen und gerechneten Dämpfungen nach den Korrekturparametern $D\delta$ bestimmen. Mit

$$\hat{\lambda}_i = \hat{\delta}_i + \hat{\omega}_i$$

$\hat{\lambda}_i$: komplexe Eigenwerte des Rechenmodells

gilt :

$$D\lambda_{ij} = - \frac{\partial (\hat{\lambda}_i - \lambda_i)}{\partial a_j} = \Phi_i^T \mathbf{K}_i \Phi_i = - \frac{\partial}{\partial a_j} \{ (\hat{\delta}_i - \delta_i) + j (\hat{\omega}_i - \omega_i) \}$$

Φ_i : nach Gl. normierte i-te Eigenform

$$D\omega_{ij} = - \frac{\partial (\hat{\omega}_i - \omega_i)}{\partial a_j} = \text{Re} \{ \Phi_i^T \mathbf{K}_i \Phi_i \} \quad (3.45a)$$

$$D\delta_{ij} = - \frac{\partial (\hat{\delta}_i - \delta_i)}{\partial a_j} = \text{Im} \{ \Phi_i^T \mathbf{K}_i \Phi_i \} \quad (3.45b)$$

Wenn nur Eigenfrequenzen angepaßt werden sollen, dann gilt

$$Dv = \begin{vmatrix} D\omega \\ Dv^a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D\omega \\ I \end{vmatrix} \quad (3.46)$$

und wenn Eigenfrequenzen und Dämpfungen angepaßt werden sollen gilt

$$Dv = \begin{vmatrix} D\omega \\ D\delta \\ Dv^a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D\omega \\ D\delta \\ I \end{vmatrix} \quad (3.47)$$

Dadurch, daß auch die Eigenformen von den Korrekturparametern abhängen, wenn auch nicht so stark wie die Eigenfrequenzen, wird die Beziehung zwischen dem Frequenz- bzw. Dämpfungsfehler und den Korrekturparametern nichtlinear. Mit dem Iterationsalgorithmus nach Abschnitt 2.3 lassen sich aber trotzdem gute Ergebnisse erzielen. Bei der Durchführung einer derartigen Parameteranpassung ergeben sich Schwierigkeiten bei der Zuordnung der gemessenen Eigenfrequenzen zu den berechneten. Eine sichere Zuordnung ist über einen Vergleich der Eigenformen zu erreichen. Hierfür ist auch die Bestimmung der Phasenverschiebungen der Schwingungen an den verschiedenen Meßstellen sehr hilfreich. Zusätzliche Vorabinformation läßt sich durch eine nichtlineare Beziehung für den Fehler, der durch die Abweichung der angepaßten Korrekturparametern von den Ausgangswerten entsteht, in die Parameteranpassung einbringen. Geht man z.B. davon aus, daß durch eine Beschädigung eines Bauteils die Steifigkeit nicht größer werden kann, und daß außerdem die Steifigkeit nicht negativ werden kann, so läßt sich dieses mit folgender Gleichung für den Parameterfehler berücksichtigen (s. Bild 3.3).

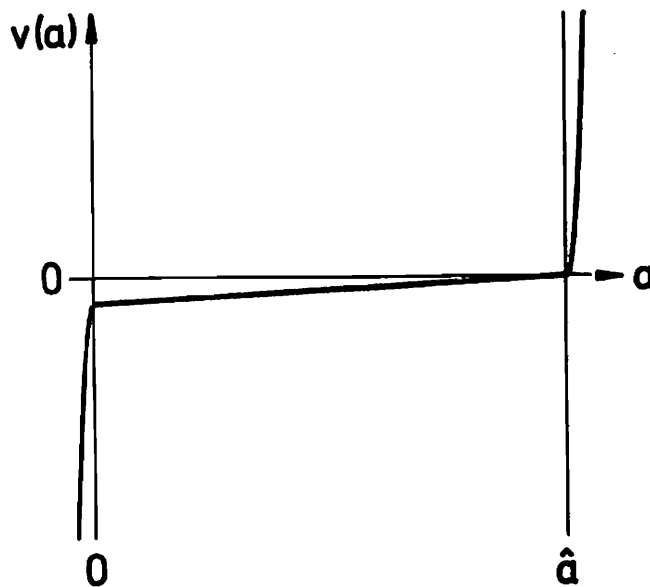


Bild 3.3 Nichtlineare Fehlerfunktion für die Abweichung der angepaßten Korrekturparameter von den Ausgangswerten.

$$v(j) = \begin{cases} \frac{a_j - \hat{a}_j}{\hat{a}_j} + c_1 \left(\frac{a_j - \hat{a}}{\hat{a}_j} + 1 \right)^{c_2} - c_1 c_2 \frac{a_j - \hat{a}_j}{\hat{a}_j} - c_1 & \text{für } a > \hat{a} \\ \frac{a_j - \hat{a}_j}{\hat{a}_j} & \text{für } \hat{a} \geq a \geq 0 \\ \frac{a_j - \hat{a}_j}{\hat{a}_j} + c_3 \left(\frac{-a_j}{\hat{a}_j} + 1 \right)^{c_4} - c_3 c_4 \frac{a_j}{\hat{a}_j} + c_3 & \text{für } 0 > a \end{cases} \quad (3.48)$$

Die Ableitung dieses Fehlers nach den Korrekturparametern lautet :

$$\frac{\partial v(j)}{\partial a_j} = \begin{cases} \frac{1}{\hat{a}_j} \left\{ 1 + c_1 c_2 \left(\frac{a_j - \hat{a}}{\hat{a}_j} + 1 \right)^{c_2 - 1} - c_1 c_2 \right\} & \text{für } a > \hat{a} \\ \frac{1}{\hat{a}_j} & \text{für } \hat{a} \geq a \geq 0 \\ \frac{1}{\hat{a}_j} \left\{ 1 + c_3 c_4 \left(\frac{-a_j}{\hat{a}_j} + 1 \right)^{c_4 - 1} - c_3 c_4 \right\} & \text{für } 0 > a \end{cases}$$

Die hier beschriebene Verbesserung des Rechenmodells durch eine Anpassung an gemessene Eigenfrequenzen wurde bei der in den Abschnitten 6 und 7 beschriebenen Versuchen benutzt, um besonders bezüglich der Eigenfrequenzen ein möglichst gutes Rechenmodell zu erhalten.

4 Schätzung und Anpassung von Systemparametern mit Hilfe von Beobachtern

4.1 Zur Anpassung der Eigenfrequenzen mit Beobachtern

Der Einsatz von "modalen Beobachtern" mit einer gleichzeitigen Korrektur der Eigenfrequenzen hat gegenüber herkömmlichen Beobachtern und auch gegenüber anderen Identifikationsverfahren folgende Vorteile:

- Die ständige Korrektur der Eigenfrequenzen ermöglicht die Verbesserung des "modalen Beobachters" (Adaption), ohne das Eigenwertproblem neu zu lösen und ohne mit den großen Systemmatrizen zu rechnen.
- Es werden gleichzeitig die Zustandsgrößen des Systems geschätzt (z.B. für eine Schwingungsüberwachung) und die Eigenwerte identifiziert. In einem weiteren Schritt kann aus einer Änderung der Eigenfrequenzen auf eine Veränderung von Systemparametern geschlossen werden, z.B. mit dem Ziel der Schadensfrüherkennung.
- Es kann eine Identifikation der Eigenwerte im Zeitbereich durchgeführt werden, ohne Probleme bei ungenau bekannten Anfangswerten oder bei impulsförmigen Störungen zu erhalten.
- Möglicherweise läßt sich eine kontinuierliche Anpassung der Eigenfrequenzen auch zur Identifikation nichtlinearer Systeme nutzen, da bei dieser Anpassung ständig um den Arbeitspunkt linearisiert wird und so Zeitverläufe der Eigenfrequenzen und gegebenenfalls auch die zeitliche Veränderung von Systemparametern bestimmt werden können.
- Es läßt sich auf diesem Wege eine Systemidentifikation mit erregten Schwingungen durchführen, wobei die Erregung im Prinzip beliebig ist. Es muß aber vorausgesetzt werden, daß alle betrachteten Eigenfrequenzen angeregt werden und die Zeitfunktionen der Erregungen müssen bekannt sind. Erregte Schwingungen werden häufig dadurch identifiziert, daß Erregung und Systemantwort in den Frequenzbereich transformiert und dort entfaltet werden, wobei durch die Fourier-Transformation und die Entfaltung numerische Schwierigkeiten auftreten. Beim Einsatz von Beobachtern und dem im folgenden dargestellten Verfahren der Parameteranpassung lassen sich bekannte Erregungen problemlos berücksichtigen. Gegenüber anderen Betrachtungen im Zeitbereich hat der Einsatz von Beobachtern den Vorteil, daß sich Fehler, die durch unbekannte Eingänge und Anfangswerte entstehen, und Modellierungsfehler nicht aufaddieren, wie bei reinen Simulationsrechnungen, sondern ständig korrigiert werden.

4.2 Allgemeines

In den Abschnitten 4.3 und 4.4 wird gezeigt, wie mit Hilfe des "modalen Beobachters" die Eigenfrequenzen und Dämpfungen des Rechenmodells, d.h. die Elemente der Systemmatrix nach der Modaltransformation, verbessert werden können. Weiterhin wird gezeigt, daß auf dem gleichen Wege auch eine Anpassung der Systemmatrizen \mathbf{M} und \mathbf{K} möglich ist, wenn sie in Substrukturen aufgeteilt und diese mit Korrekturparametern a_i versehen werden /40/.

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \sum_i a_i \mathbf{K}_i \quad , \text{ bzw. } \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \sum_j a_j \mathbf{M}_j$$

Die Anpassung kann entweder direkt über die Minimierung des Beobachtungsfehlers erfolgen, oder indirekt, indem zunächst die Eigenwerte bestimmt und dann, wie in Abschnitt 3.5 beschrieben, die Systemmatrizen an die Eigenwerte angepaßt werden. Dies indirekte Verfahren erwies sich gerade bei größeren Systemen als günstig, da es so möglich ist, in dem modal transformierten Bereich mit den wenigen Freiheitsgraden zu arbeiten. Mit den großen Systemmatrizen muß erst gerechnet werden, wenn sich die Eigenwerte so stark verändert haben, daß eine Korrektur der Eigenformen notwendig wird.

Eine Anpassung der modalen Dämpfungsparameter ist in den Versuchen nicht durchgeführt worden, da die Dämpfung bei den betrachteten schwach gedämpften Systemen nur einen geringen Einfluß auf das Schwingungsverhalten hat. Sie könnte für stark gedämpfte Systeme interessant sein. Anhand der hierfür hergeleiteten Gleichungen ist aber zu sehen, daß eine solche Anpassung möglich ist.

In der Regelungstechnik werden Beobachter vorwiegend eingesetzt, um den Zustandsvektor des Systems zu schätzen. Das gilt auch für adaptive Beobachter, bei denen die Beobachtermatrizen und nicht physikalisch interpretierbare Größen veränderten Systemeigenschaften angepaßt werden. Außerdem sind diese Verfahren für Systeme mit wenigen Freiheitsgraden entwickelt worden, was sich in ihren Konvergenzeigenschaften und dem Rechenaufwand für einen Zeitschritt bemerkbar macht.

Im folgenden wird untersucht, wie mit Hilfe eines Beobachters auch für Systeme mit vielen Freiheitsgraden charakteristische Parameter zu bestimmen sind und wie eventuelle Veränderungen festgestellt werden können. Mit diesen Parametern läßt sich das System korrigieren und dann ein verbesserter Beobachter entwerfen. Dazu ist ein Identitätsbeobachter zu entwerfen, der unter anderem auch die Zustandsgrößen an den Meßstellen schätzt. Aus dem Vergleich zwischen geschätzten und gemessenen Zustandsgrößen an diesen Stellen läßt sich ein Fehler ermitteln. Die Systemparameter werden nun so bestimmt, daß dieser Fehler minimal wird.

Es ist folgendermaßen vorzugehen:

1. Erstellung eines möglichst guten Rechenmodells
2. Entwurf eines "modalen Beobachters" (nach der Modaltransformation und Reduktion der Freiheitsgrade ist das Entwurfsverfahren beliebig)
3. Durchführung der Beobachtung mit Bestimmung des Beobachtungsfehlers und Optimierung von Systemparametern durch Minimierung des Beobachtungsfehlers
4. Korrektur des Rechenmodells

Die Punkte 2 bis 4 können in einer Iterationsschleife mehrfach durchlaufen werden.

In Abschnitt 4.7 wird gezeigt, wie Verstärkungsfaktoren der Beobachtereingangsmatrix über eine Minimierung des Beobachtungsfehlers bestimmt werden können. Ebenso lassen sich Unwuchten nach Betrag und Phase auf diese Art bestimmen (s. Abschnitt 4.8), wenn die Biegeschwingungen der rotierenden Welle beobachtet werden. Diese Überlegungen konnten allerdings bisher nur anhand von Simulationsrechnungen bestätigt werden. Weiterhin ist in Abschnitt 4.9 die Bestimmung einer konstanten Verschiebung des Eingangssignals (Offset) beschrieben.

Mit Hilfe eines erweiterten Kalman-Filters (s. Abschnitt 4.10) können die Zustandsschätzung und eine rekursive Parameteranpassung gleichzeitig durchgeführt werden.

4.3 Indirekte Verbesserung des Rechenmodells

4.3.1 Herleitung der Gleichungen für die Anpassung von Eigenfrequenzen und Dämpfungen

Es sollen nun die Eigenwerte $\lambda_i = \delta_i + j \omega_i$ des Rechenmodells so verändert werden, daß die Beobachtungsfehler an den Meßpunkten (nur die sind zu bestimmen) minimal werden. Im folgenden wird vorausgesetzt, daß bereits ein Beobachter für das modal transformierte System entworfen worden ist, z.B. nach dem in Abschnitt 2 beschriebenen Verfahren oder auch nach anderen Verfahren, die der Literatur zu entnehmen sind. Die Beobachtungsfehler der einzelnen Zeitschritte werden zu einem Fehlervektor zusammengefaßt, den es zu minimieren gilt. Der Fehlervektor \mathbf{v} hat dann die Form

$$\mathbf{v}^T = | \tilde{\mathbf{y}}_1^T, \dots, \tilde{\mathbf{y}}_i^T, \dots, \tilde{\mathbf{y}}_N^T | \quad . \quad (4.1)$$

\mathbf{v} : Fehlervektor (Residuenvektor)

N : Anzahl der betrachteten Zeitschritte

Zur Minimierung wurde die Methode der gewichteten kleinsten Fehlerquadrate verwendet mit dem Gütekriterium

$$J = \mathbf{v}^T \mathbf{G} \mathbf{v}$$

\mathbf{G} : Wichtungsmatrix

Die notwendige Bedingung für ein Minimum lautet

$$\operatorname{Re} \left(\mathbf{Dv}^T(\omega_i, \delta_i) \mathbf{G} \mathbf{v}(\omega_i, \delta_i) \right) \Big|_{\delta_{i+j} \omega_i = \hat{\delta}_{i+j} \hat{\omega}_i} = \mathbf{0} \quad (4.3)$$

mit

$$\mathbf{Dv}^\omega = \left| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \omega_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \omega_N} \right| \quad ; \quad \mathbf{Dv}^\delta = \left| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \delta_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \delta_N} \right| \quad (4.4)$$

\mathbf{Dv}^ω : Sensitivitätsmatrix bezüglich der Eigenfrequenzen

\mathbf{Dv}^δ : Sensitivitätsmatrix bezüglich der Dämpfungen

Je nachdem, ob die Eigenfrequenzen (Gl. 4.5), die Dämpfungen (Gl. 4.6) oder beides (Gl. 4.7) bestimmt werden sollen, gilt:

$$\mathbf{Dv} = \mathbf{Dv}^\omega \quad ; \quad \text{Parametervektor } \boldsymbol{\omega} = |\omega_1, \dots, \omega_N| \quad (4.5)$$

$$\mathbf{Dv} = \mathbf{Dv}^\delta \quad ; \quad \text{Parametervektor } \boldsymbol{\omega} = |\delta_1, \dots, \delta_N| \quad (4.6)$$

$$\mathbf{Dv} = |\mathbf{Dv}^\omega, \mathbf{Dv}^\delta| \quad ; \quad \text{Parametervektor } \boldsymbol{\omega} = |\omega_1, \dots, \omega_N, \delta_1, \dots, \delta_N| \quad (4.7)$$

Für die Lösung der Gleichung 4.3 wie auch für andere Optimierungsverfahren muß vorausgesetzt werden, daß

1. die Abhängigkeit zwischen dem Fehlervektor \mathbf{v} und den zu optimierenden Parametern ω_i, δ_i
2. die Ableitung des Fehlervektors nach den gesuchten Parametern ω_i, δ_i

bekannt ist.

Zu Punkt 1

Der Beobachtungsfehler $\tilde{\mathbf{y}}_k$ für einen Zeitschritt berechnet sich nach

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{y}}_{k+1} &= \hat{\mathbf{y}}_{k+1} - \mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{C} \odot \hat{\mathbf{q}}_{k+1} - \mathbf{y}_{k+1} \\ &= \mathbf{C} \odot \{ \mathbf{F} \hat{\mathbf{q}}_k + \mathbf{H} \mathbf{y}_k + \mathbf{B}_{\text{dis}} \mathbf{u}_k \} - \mathbf{y}_{k+1}\end{aligned}\quad (4.8)$$

Mit der Entwurfsbedingung für die Beobachtermatrix \mathbf{F}

$$\mathbf{F} = \mathbf{\Lambda}_{\text{dis}} - \mathbf{H} \mathbf{C} \odot$$

gilt

$$\tilde{\mathbf{y}}_{k+1} = \mathbf{C} \odot \{ \mathbf{\Lambda}_{\text{dis}} \hat{\mathbf{q}}_k + \mathbf{H} (\mathbf{y}_k - \mathbf{C} \odot \hat{\mathbf{q}}_k) + \mathbf{B}_{\text{dis}} \mathbf{u}_k \} - \mathbf{y}_{k+1} \quad (4.9)$$

mit

$$\mathbf{\Lambda}_{\text{dis}} = \left(\begin{array}{ccc} e^{\delta_1 \Delta t} \cos(\omega_1 \Delta t) & e^{\delta_1 \Delta t} \sin(\omega_1 \Delta t) & 0 \\ -e^{\delta_1 \Delta t} \sin(\omega_1 \Delta t) & e^{\delta_1 \Delta t} \cos(\omega_1 \Delta t) & \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ 0 & & e^{\delta_N \Delta t} \cos(\omega_N \Delta t) & e^{\delta_N \Delta t} \sin(\omega_N \Delta t) \\ & & -e^{\delta_N \Delta t} \sin(\omega_N \Delta t) & e^{\delta_N \Delta t} \cos(\omega_N \Delta t) \end{array} \right)$$

$$\mathbf{B}_{\text{dis}} = \left(\begin{array}{ccc} v_1 & w_1 & 0 \\ -w_1 & v_1 & \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ 0 & & v_N & w_N \\ & & -w_N & v_N \end{array} \right) \odot^{-1} \mathbf{B}_{\text{kont}}$$

$$w_i = \frac{1}{\delta_i^2 + \omega_i^2} \{ e^{\delta_i \Delta t} (\delta_i \sin(\omega_i \Delta t) - \omega_i \cos(\omega_i \Delta t)) + \omega_i \}$$

$$v_i = \frac{1}{\delta_i^2 + \omega_i^2} \{ e^{\delta_i \Delta t} (\delta_i \cos(\omega_i \Delta t) + \omega_i \sin(\omega_i \Delta t)) - \delta_i \}$$

Zu Punkt 2

Die Ableitung des Beobachtungsfehlers nach den Eigenfrequenzen läßt sich rekursiv bestimmen. Mit Gl. 4.8 gilt :

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{y}}_{k+1}}{\partial \omega_i} = \mathbf{C} \Phi \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}_{k+1}}{\partial \omega_i} \quad (4.10)$$

Die Messung beginnt mit $\mathbf{y}_0, \hat{\mathbf{q}}_0$

$$\hat{\mathbf{q}}_1 = \mathbf{F} \hat{\mathbf{q}}_0 + \mathbf{H} \mathbf{y}_0 + \mathbf{B}_{\text{dis}} \mathbf{u}_0$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{q}}_1}{\partial \omega_i} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \omega_i} \hat{\mathbf{q}}_0 + \frac{\partial \mathbf{B}_{\text{dis}}}{\partial \omega_i} \mathbf{u}_0 = \boldsymbol{\xi}_{1,i} \quad (4.11)$$

$$\hat{\mathbf{q}}_2 = \mathbf{F} \hat{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{H} \mathbf{y}_1 + \mathbf{B}_{\text{dis}} \mathbf{u}_1$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{q}}_2}{\partial \omega_i} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \omega_i} \hat{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{F} \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}_1}{\partial \omega_i} + \frac{\partial \mathbf{B}_{\text{dis}}}{\partial \omega_i} \mathbf{u}_1 = \boldsymbol{\xi}_{2,i} \quad (4.12)$$

Allgemein gilt :

$$\hat{\mathbf{q}}_{k+1} = \mathbf{F} \hat{\mathbf{q}}_k + \mathbf{H} \mathbf{y}_k + \mathbf{B}_{\text{dis}} \mathbf{u}_k$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{q}}_{k+1}}{\partial \omega_i} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \omega_i} \hat{\mathbf{q}}_k + \mathbf{F} \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}_k}{\partial \omega_i} + \frac{\partial \mathbf{B}_{\text{dis}}}{\partial \omega_i} \mathbf{u}_k = \boldsymbol{\xi}_{k+1,i} \quad (4.13)$$

$$= \mathbf{L}_i^{\mathbf{F}} \mathbf{q}_k + \mathbf{F} \boldsymbol{\xi}_k + \mathbf{L}_i^{\mathbf{B}} \mathbf{u}_k$$

mit

$$\mathbf{L}_i^{\mathbf{F}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \omega_i}$$

$$\mathbf{L}_i^{\mathbf{B}} = \frac{\partial \mathbf{B}_{\text{dis}}}{\partial \omega_i}$$

Die Sensitivitätsmatrizen L_1^F und L_1^B berechnen sich mit den obigen Gleichungen für Λ_{dis} und B_{dis} nach :

$$L_1^F = \frac{\partial (\Lambda - H C \Phi)}{\partial \omega_1} = \frac{\partial \Lambda}{\partial \omega_1}$$

$$= \Delta t e^{\delta_1 \Delta t} \begin{vmatrix} 0 & 0 & & & & & & & & & 0 \\ 0 & 0 & & & & & & & & & 0 \\ & & \ddots & & & & & & & & \vdots \\ & & & -\sin(\omega \Delta t) & \cos(\omega \Delta t) & & & & & & \\ & & & -\cos(\omega \Delta t) & -\sin(\omega \Delta t) & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & 0 & & & & & 0 & 0 & \\ & & & & & & & & & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (4.14)$$

$$L_1^B = \frac{\partial B_{dis}}{\partial \omega_1} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & & & & & & & & & 0 \\ 0 & 0 & & & & & & & & & 0 \\ & & \ddots & & & & & & & & \vdots \\ & & & \frac{\partial v_1}{\partial \omega_1} & \frac{\partial w_1}{\partial \omega_1} & & & & & & \\ & & & -\frac{\partial w_1}{\partial \omega_1} & \frac{\partial v_1}{\partial \omega_1} & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & 0 & & & & & 0 & 0 & \\ & & & & & & & & & 0 & 0 \end{vmatrix} \Phi^{-1} B_{kont} \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial \omega_1} = \frac{e^{\delta_1 \Delta t} \{ \delta_1 \Delta t \cos(\omega_1 \Delta t) + \omega_1 \Delta t \sin(\omega_1 \Delta t) - \cos(\omega_1 \Delta t) \} + 1}{\delta_1^2 + \omega_1^2} - \frac{2 \omega_1 e^{\delta_1 \Delta t} \{ \delta_1 \sin(\omega_1 \Delta t) - \omega_1 \cos(\omega_1 \Delta t) \} + 2 \omega_1^2}{(\delta_1^2 + \omega_1^2)^2} \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial \omega_1} = \frac{e^{\delta_1 \Delta t} \{ -\delta_1 \Delta t \sin(\omega_1 \Delta t) + \omega_1 \Delta t \cos(\omega_1 \Delta t) + \sin(\omega_1 \Delta t) \}}{\delta_1^2 + \omega_1^2} - \frac{2 \omega_1 e^{\delta_1 \Delta t} \{ \delta_1 \cos(\omega_1 \Delta t) + \omega_1 \sin(\omega_1 \Delta t) \} - 2 \delta_1 \omega_1}{(\delta_1^2 + \omega_1^2)^2} \quad (4.17)$$

Bei der Bestimmung der Ableitung des Beobachtungsfehlers nach den Dämpfungen wird entsprechend vorgegangen.

$$\hat{\mathbf{q}}_1 = \mathbf{F} \hat{\mathbf{q}}_0 + \mathbf{H} \mathbf{y}_0 + \mathbf{B}_{dis} \mathbf{u}_0$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{q}}_1}{\partial \delta_1} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \delta_1} \hat{\mathbf{q}}_0 + \frac{\partial \mathbf{B}_{dis}}{\partial \delta_1} \mathbf{u}_0 = \boldsymbol{\eta}_{1,1} \quad (4.18)$$

Allgemein gilt :

$$\hat{\mathbf{q}}_{k+1} = \mathbf{F} \hat{\mathbf{q}}_k + \mathbf{H} \mathbf{y}_k + \mathbf{B}_{dis} \mathbf{u}_k$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}_{k+1}}{\partial \delta_1} &= \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \delta_1} \hat{\mathbf{q}}_k + \mathbf{F} \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}_k}{\partial \delta_1} + \frac{\partial \mathbf{B}_{dis}}{\partial \delta_1} \mathbf{u}_k = \boldsymbol{\eta}_{k+1,1} \\ &= \mathbf{P}_1^F \hat{\mathbf{q}}_k + \mathbf{F} \boldsymbol{\eta}_k + \mathbf{P}_1^B \mathbf{u}_k \end{aligned} \quad (4.19)$$

mit

$$\mathbf{P}_1^F = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \delta_1}, \quad \mathbf{P}_1^B = \frac{\partial \mathbf{B}_{dis}}{\partial \delta_1}$$

Die Sensitivitätsmatrizen \mathbf{P}_1^F und \mathbf{P}_1^B lassen sich nach Gl. 4.20 bis 4.24 bestimmen

$$\mathbf{P}_1^F = \frac{\partial (\mathbf{A} - \mathbf{H} \mathbf{C} \Phi)}{\partial \delta_1} = \frac{\mathbf{A}}{\delta_1}$$

$$= \Delta t e^{\delta_1 \Delta t} \left| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \mathbf{O} \\ & & \ddots & \\ & & & \cos(\omega_1 \Delta t) & \sin(\omega_1 \Delta t) \\ & & & -\sin(\omega_1 \Delta t) & \cos(\omega_1 \Delta t) \\ & & & & \ddots \\ \mathbf{O} & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 \end{array} \right| \quad (4.20)$$

$$\mathbf{P}_1^B = \frac{\partial \mathbf{B}_{dis}}{\partial \omega_1} = \left| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \mathbf{O} \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{\partial v_1}{\partial \delta_1} & \frac{\partial w_1}{\partial \delta_1} \\ & & & -\frac{\partial w_1}{\partial \delta_1} & \frac{\partial v_1}{\partial \delta_1} \\ & & & & \ddots \\ \mathbf{O} & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 \end{array} \right| \Phi^{-1} \mathbf{B}_{kont} \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial w_i}{\partial \delta_i} = \frac{e^{\delta_i \Delta t} \{ \delta_i \Delta t \sin(\omega_i \Delta t) - \omega_i \Delta t \cos(\omega_i \Delta t) + \sin(\omega_i \Delta t) \}}{\delta_i^2 + \omega_i^2} - \frac{2 \delta_i e^{\delta_i \Delta t} \{ \delta_i \sin(\omega_i \Delta t) - \omega_i \cos(\omega_i \Delta t) \} + 2 \delta_i \omega_i}{(\delta_i^2 + \omega_i^2)^2} \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial \delta_i} = \frac{e^{\delta_i \Delta t} \{ \delta_i \Delta t \cos(\omega_i \Delta t) + \omega_i \Delta t \sin(\omega_i \Delta t) + \cos(\omega_i \Delta t) \} - 1}{\delta_i^2 + \omega_i^2} - \frac{2 \delta_i e^{\delta_i \Delta t} \{ \delta_i \cos(\omega_i \Delta t) + \omega_i \sin(\omega_i \Delta t) \} - 2 \delta_i^2}{(\delta_i^2 + \omega_i^2)^2} \quad (4.23)$$

Der Rekursionsalgorithmus zur Bestimmung der Sensitivitätsmatrizen Dv^ω bzw. Dv^δ sieht dann folgendermaßen aus :

- Bestimmung von L_i^F und L_i^B nach Gl. 4.14 bis 4.17, bzw P_i^F und P_i^B nach Gl. 4.20 bis 4.23
- Start der Messung und Zustandsschätzung mit y_0 und \hat{q}_0
- Bestimmung von ξ_{1i} nach Gl. 4.11 , bzw von η_{1i} nach Gl. 4.18
- Bestimmung von $\xi_{k+1i} = \frac{\partial \hat{q}_{k+1}}{\partial \omega_i}$ nach Gl. 4.13, bzw. von $\eta_{k+1i} = \frac{\partial \hat{q}_{k+1}}{\partial \delta_i}$ nach Gl. 4.19

Die Matrix Dv^ω hat damit die Form :

$$Dv^\omega = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{y}_1}{\partial \omega_1}, \dots, \frac{\partial \tilde{y}_1}{\partial \omega_i}, \dots, \frac{\partial \tilde{y}_1}{\partial \omega_N} \\ \frac{\partial \tilde{y}_k}{\partial \omega_1}, \dots, \frac{\partial \tilde{y}_k}{\partial \omega_i}, \dots, \frac{\partial \tilde{y}_k}{\partial \omega_N} \\ \frac{\partial \tilde{y}_M}{\partial \omega_1}, \dots, \frac{\partial \tilde{y}_M}{\partial \omega_i}, \dots, \frac{\partial \tilde{y}_M}{\partial \omega_N} \end{pmatrix}$$

Die Matrix Dv^δ hat eine entsprechende Form.

In Bild 4.1 ist die Korrektur der Eigenfrequenzen des Rechenmodells und damit des Beobachters in einem Flußdiagramm dargestellt.

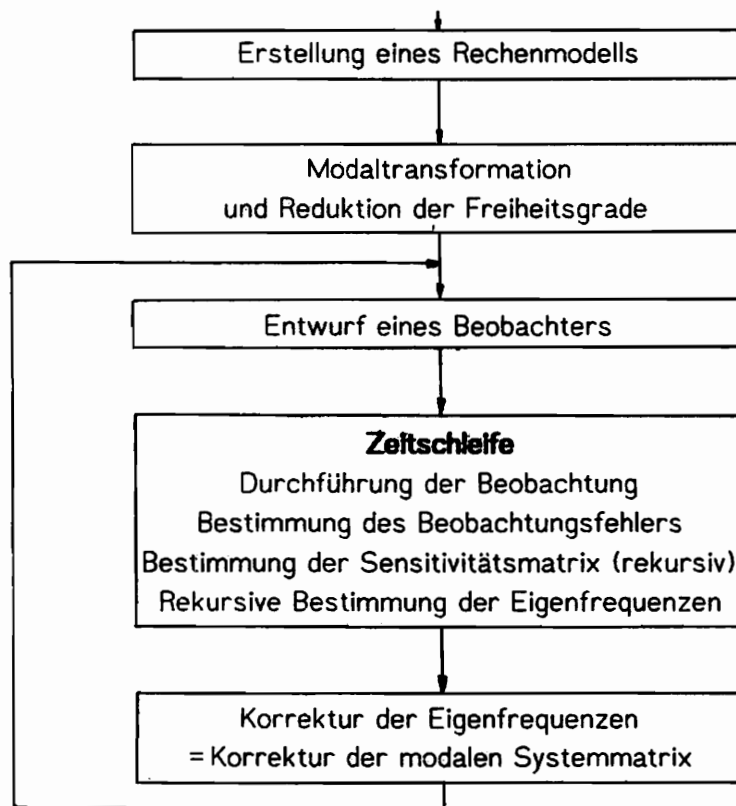


Bild 4.1 Beobachter mit Anpassung der Eigenfrequenzen des Rechenmodells (adaptiver modaler Beobachter)

Beim Start einer Beobachtung hat man meist das Problem, daß die Anfangswerte nicht genau bekannt sind. Bis der Beobachter sich an den tatsächlichen Schwingungszustand angepaßt hat, erhält man einen Beobachtungsfehler, der nicht durch die falschen Systemparameter verursacht wird, sondern durch die falschen Anfangswerte. Es empfiehlt sich deshalb, die Parameterbestimmung erst zu beginnen, nachdem sich der Beobachter auf den tatsächlichen Systemzustand eingeschwungen hat. Die rekursive Bestimmung der Sensitivitätsmatrix sollte aber schon früher einsetzen, da durch vorhergehende Beobachterrechnung nicht mehr gilt:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{q}}_0}{\partial \omega_i} = \mathbf{0} \quad . \text{ bzw. } \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}_0}{\partial \delta_i} = \mathbf{0}$$

4.3.2 Verbesserung des Rechenmodells durch Anpassung an die verbesserten Eigenfrequenzen und Dämpfungen

Die Verbesserung des Beobachters über eine Anpassung der Systemeigenfrequenzen ist nur innerhalb bestimmter Grenzen möglich, denn wenn sich Systemparameter, z.B. Steifigkeiten und damit auch die Eigenfrequenzen geändert haben, dann haben sich auch

die Eigenvektoren verändert, die für die Modaltransformation benötigt werden. In diesem Fall ist das Rechenmodell selbst zu verbessern. Es ist deshalb eine Anpassung des Rechenmodells an die korrigierten Eigenfrequenzen entsprechend Abschnitt 3.5 durchzuführen.

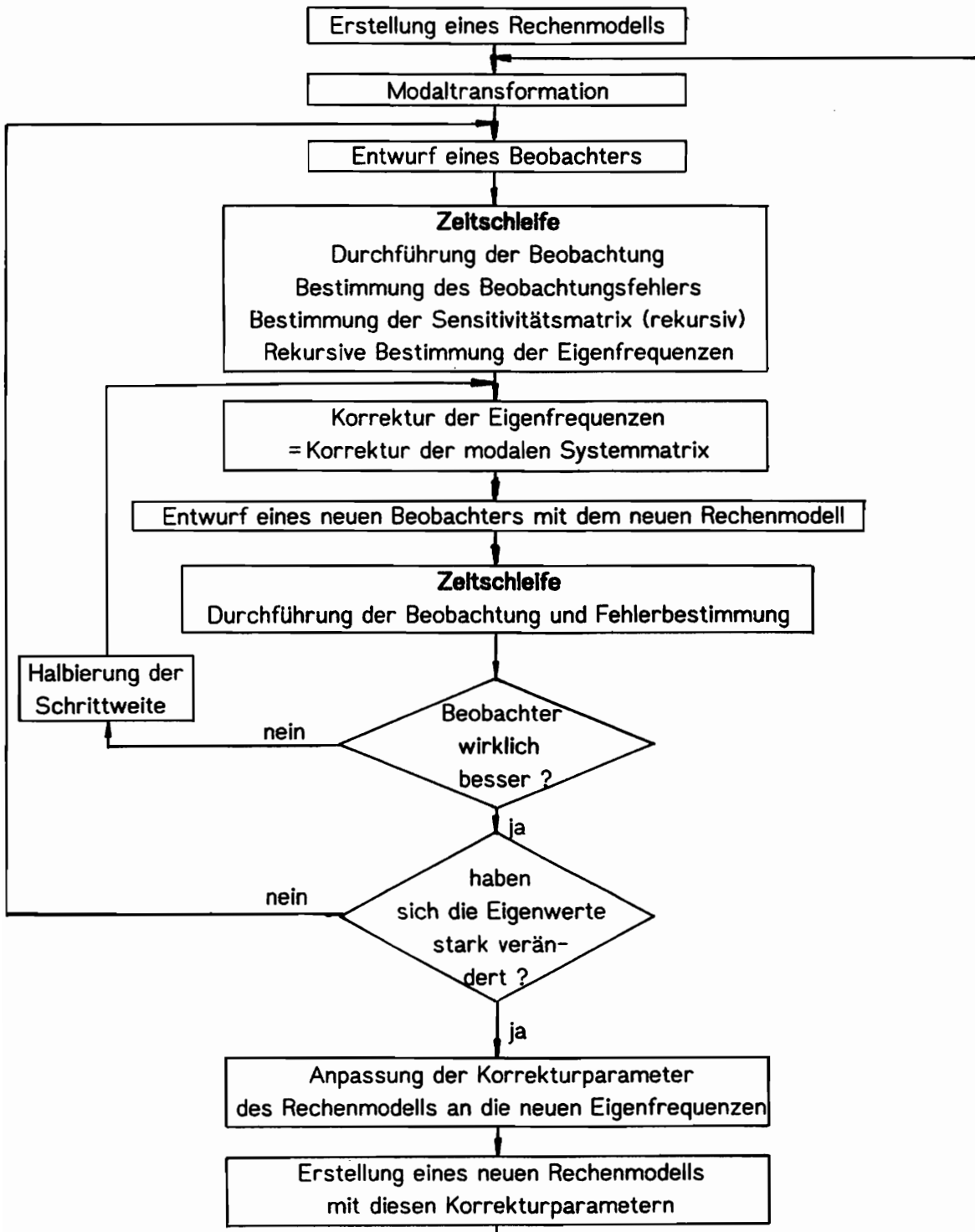


Bild 4.2 Indirekte Verbesserung des Rechenmodells mit Hilfe eines Beobachters

Die in Bild 4.2 dargestellte indirekte Verbesserung des Rechenmodells durch eine Minimierung des Beobachtungsfehlers ist in Simulationsrechnungen für den in Abschnitt 2.6.2 beschriebenen einseitig eingespannten Balken durchgeführt worden. Die Steifigkeit des 2. Balkenelementes wurde um 20% reduziert. Der Beobachter berücksichtigt 4 Eigenfrequenzen des Rechenmodells. Es wurde ein langsamer Beobachter, der relativ empfindlich auf Modellierungsfehler reagiert, verwendet. In Bild 4.3 sind die Zeitverläufe des 7. Freiheitsgrades (s. Bild 2.5) von Beobachter und Simulationsrechnung (hier Meßwert) und der Beobachtungsfehler vor der Verbesserung des Beobachterrechenmodells dargestellt. In Bild 4.4 sind die entsprechenden Zeitverläufe nach einer Anpassung der Eigenfrequenzen in 2 Iterationsschritten und in Bild 4.5 nach einer Anpassung des Rechenmodells an diese Eigenfrequenzen zu sehen. An diesen Bildern wird deutlich, daß der Beobachtungsfehler nur zum Verschwinden gebracht werden kann, wenn mit dem Rechenmodell auch die Eigenformen, die für den Entwurf des "modalen Beobachters" benötigt werden, verbessert werden. Die Steifigkeitsmatrizen und Eigenfrequenzen von Rechenmodell und (simuliertem) System stimmten nach dieser Anpassung exakt überein.

durchgezogen : Beobachter
gestrichelt (lange Striche) : Meßwert
dünn durchgezogen : Beobachtungsfehler

7. Freiheitsgrad
Meßzeit : $T = 0.5$ sec

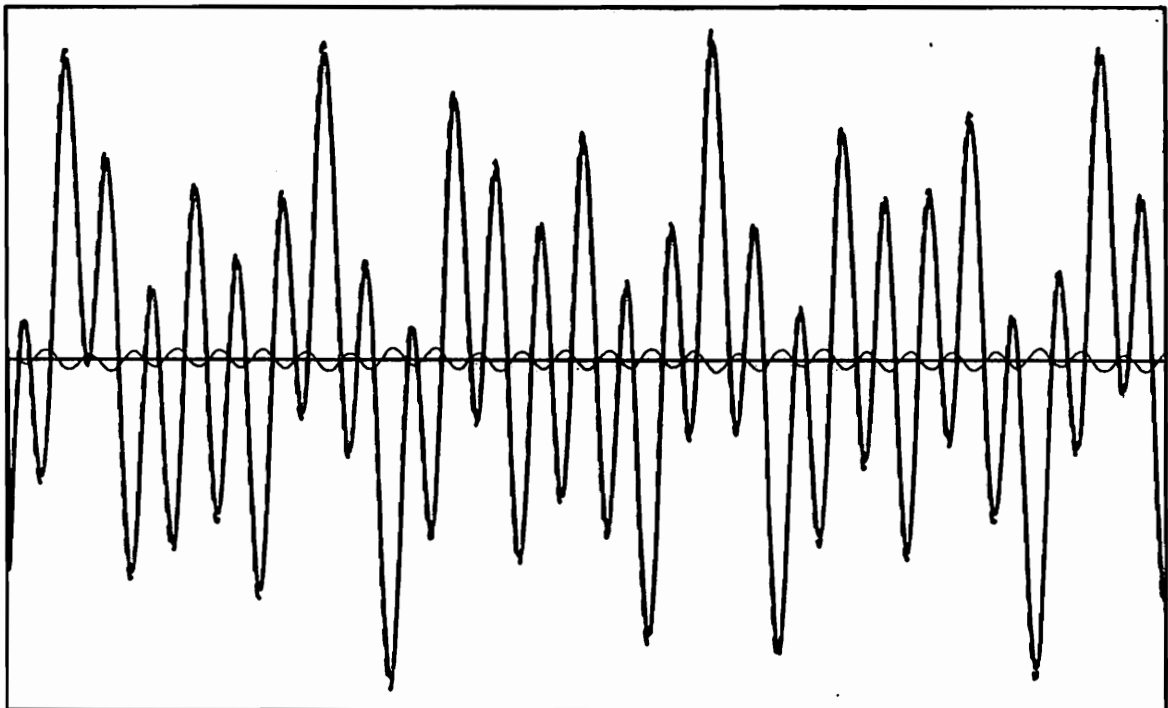


Bild 4.3 Zeitverläufe des 7. Freiheitsgrades vor der Verbesserung des Rechenmodells

durchgezogen : Beobachter
gestrichelt (lange Striche) : Meßwert
dünn durchgezogen : Beobachtungsfehler

7. Freiheitsgrad
Meßzeit : $T = 0.5$ sec

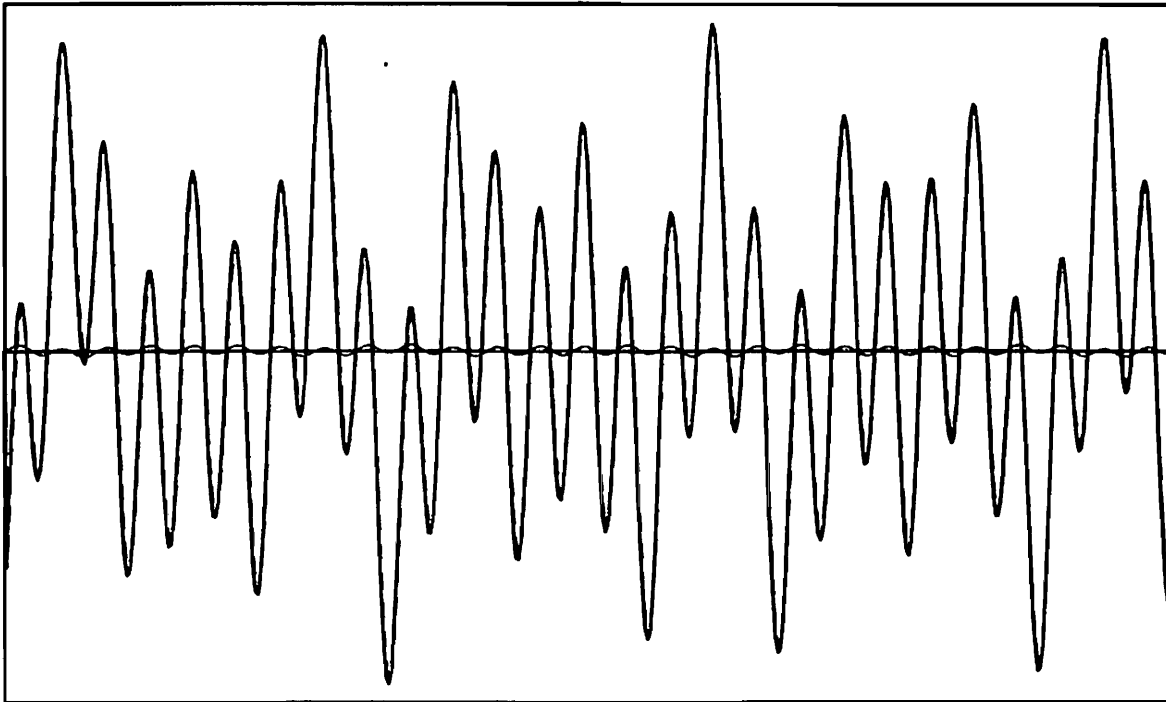


Bild 4.4 Zeitverläufe des 7. Freiheitsgrades nach Verbesserung der Eigenfrequenzen

durchgezogen : Beobachter
gestrichelt (lange Striche) : Meßwert
dünn durchgezogen : Beobachtungsfehler

7. Freiheitsgrad
Meßzeit : $T = 0.5$ sec

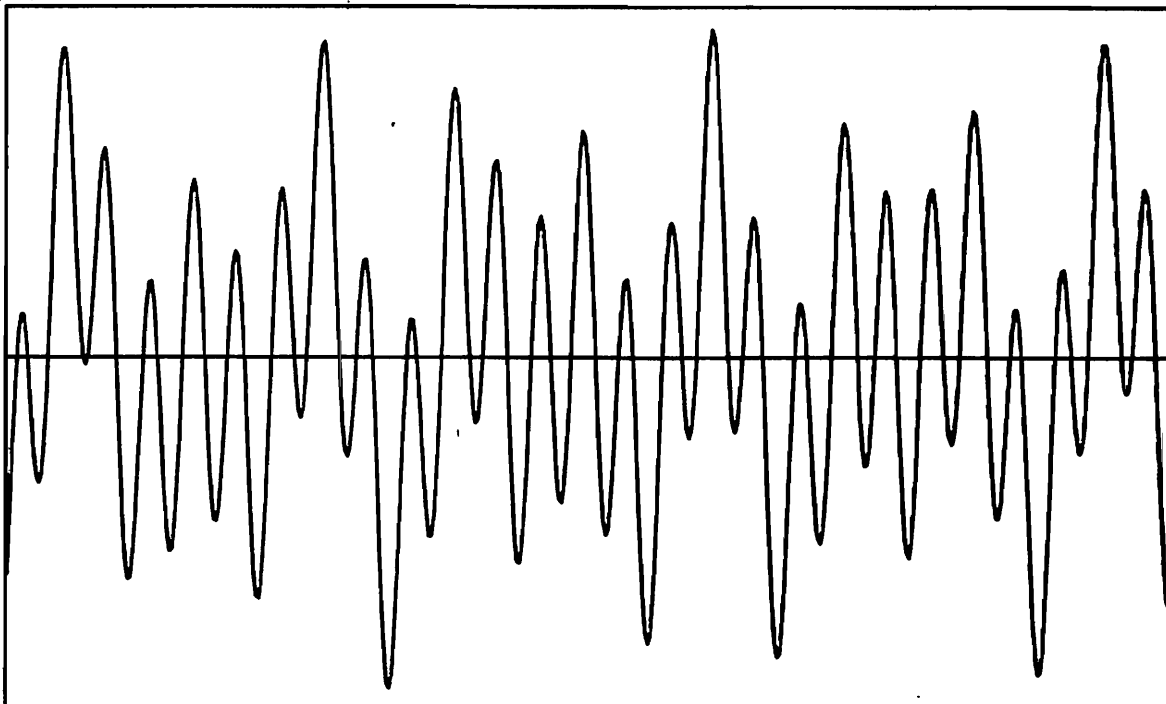


Bild 4.5 Zeitverläufe des 7. Freiheitsgrades nach Verbesserung des Rechenmodells
(Der Beobachtungsfehler ist jetzt ungefähr Null)

4.4 Herleitung der Gleichungen für die direkte Anpassung von Korrekturparametern

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, wie die Korrekturparameter a_j verbessert werden können, wenn die Steifigkeitsmatrix nach der Gleichung

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \sum_j a_j \mathbf{K}_j$$

angesetzt wird. Wie schon in Abschnitt 3.5 beschrieben, handelt es sich bei den Matrizen \mathbf{K}_j um die Steifigkeiten von Substrukturen. Die Minimierung des Beobachtungsfehlers und die damit verbundene Anpassung des Rechenmodells mit Hilfe dieser Korrekturparameter hat den Vorteil, daß man in diesem Fall Größen betrachtet, die sich im Hinblick auf eine Schadensfrüherkennung direkt interpretieren lassen. Bei einer Veränderung dieser Parameter ist die Ursache leicht zu lokalisieren. Sie ist in der Substruktur zu suchen, die dem veränderten Parameter zugeordnet ist. Die Anpassung dieser Parameter über eine Minimierung des Beobachtungsfehlers kann entweder direkt oder indirekt erfolgen. Hier soll der direkte Weg beschrieben werden. Für eine solche Optimierung wird zunächst die Beziehung zwischen dem Beobachtungsfehler und den Korrekturparametern, bzw. dem Parametervektor \mathbf{a}

$$\mathbf{a}^T = |a_1, \dots, a_j, \dots, a_J|$$

benötigt :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}}_{k+1} &= \hat{\mathbf{y}}_{k+1} - \mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{C} \Phi \hat{\mathbf{q}}_{k+1} - \mathbf{y}_{k+1} \\ &= \mathbf{C} \Phi (\mathbf{\Lambda}(\mathbf{a}) \hat{\mathbf{q}}_k + \mathbf{H} (\mathbf{y}_k - \mathbf{C} \Phi \hat{\mathbf{q}}_k) + \mathbf{B}_{\text{dis}}(\mathbf{a}) \mathbf{u}_k) - \mathbf{y}_{k+1} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Die Veränderung der Eigenformen bei Änderung des Parametervektors \mathbf{a} , die im Vergleich zu der Änderung der Eigenfrequenzen relativ gering ist, wird zunächst vernachlässigt. Sie wird durch die Iteration entsprechend Bild 4.6 berücksichtigt.

Um die Funktionalmatrix der Ableitungen des Beobachtungsfehlers nach den Korrekturparametern zu bestimmen, wird zunächst die Ableitung der Eigenfrequenzen nach den Korrekturparametern bestimmt. Für das viskos gedämpfte System mit

$$\lambda_i = \delta_i + j \omega_i$$

λ_i : Eigenwerte des Rechenmodells

gilt

$$\frac{\partial \lambda_{\text{red } i}}{\partial a_j} = - \mathbf{u}_{\text{rech } i}^T \mathbf{K}_j \mathbf{u}_{\text{rech } i}$$

$\mathbf{u}_{\text{rech } i}$: normierte Eigenform der i-ten Eigenschwingung
(Normierung s. Gl. 2.32 bzw. 2.33)

$$D\omega_{ij} = \frac{\partial \omega_{rech i}}{\partial a_j} = - \operatorname{Im} (\mathbf{u}_{rech i}^T \mathbf{K}_j \mathbf{u}_{rech i}) \quad (4.25)$$

$$D\delta_{ij} = \frac{\partial \delta_{rech i}}{\partial a_j} = - \operatorname{Re} (\mathbf{u}_{rech i}^T \mathbf{K}_j \mathbf{u}_{rech i}) \quad (4.26)$$

Die Funktionalmatrix der Ableitungen des Beobachtungsfehlers nach den Korrekturparametern läßt sich mit Hilfe der Kettenregel und der Ableitung des Beobachtungsfehlers nach den Eigenwerten (s. Abschnitt 4.3) bestimmen. Bekannt ist mit

$$\mathbf{v} = | y_1, \dots, y_N |$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\omega_i) \quad , \text{ bzw. } \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(\omega_i, \delta_i) \quad i = 1, \dots, N$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial \omega_i} = Dv_{ij}^\omega \quad , \text{ bzw. } \quad \frac{\partial v_i}{\partial \delta_i} = Dv_{ij}^\delta$$

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial a_j} = D\omega_{ij} \quad , \text{ bzw. } \quad \frac{\partial \delta_i}{\partial a_j} = D\delta_{ij}$$

Damit gilt für die gesuchte Funktionalmatrix ohne Berücksichtigung der Dämpfung

$$\frac{\partial v_k}{\partial a_j} = \frac{\partial v_i}{\partial \omega_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial a_j} = Dv_{ki}^\omega D\omega_{ij}$$

$$D\mathbf{v}^a = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{y}_1}{\partial a_1}, \dots, \frac{\partial \tilde{y}_1}{\partial a} \\ \vdots \\ \frac{\partial \tilde{y}_N}{\partial a_1}, \dots, \frac{\partial \tilde{y}_N}{\partial a} \end{pmatrix} = D\mathbf{v}^\omega D\boldsymbol{\omega} \quad (4.27)$$

oder, falls die Dämpfung berücksichtigt wird, gilt

$$\frac{\partial v_k}{\partial a_j} = \frac{\partial v_k}{\partial \omega_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial a_j} + \frac{\partial v_k}{\partial \delta_i} \frac{\partial \delta_i}{\partial a_j} = Dv_{ki}^\omega D\omega_{ij} + Dv_{ki}^\delta D\delta_{ij}$$

$$D\mathbf{v}^a = D\mathbf{v}^\omega D\boldsymbol{\omega} + D\mathbf{v}^\delta D\boldsymbol{\delta} \quad (4.28)$$

Mit diesen Sensitivitätsmatrizen und z.B. mit den in Abschnitt 2.3 beschriebenen Optimierungsverfahren läßt sich eine Minimierung des Beobachtungsfehlers über eine Anpassung der Korrekturparameter der Steifigkeitsmatrix durchführen.

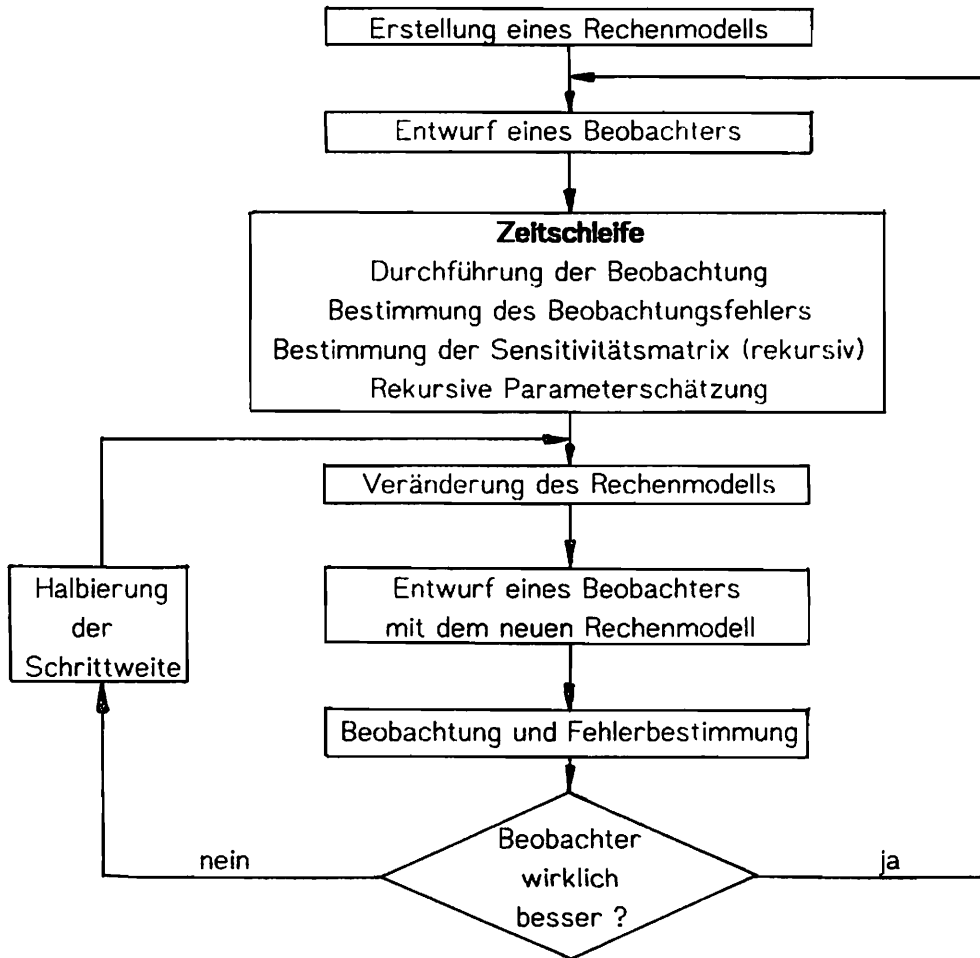


Bild 4.6 Beobachter mit direkter Bestimmung von Korrekturparametern der Systemmatrix

4.5 Spezielle Eigenschaften eines Beobachters für Zustandsschätzung und Parameteranpassung

Grundsätzlich ist das Entwurfsverfahren für den Beobachter bei dieser Art der Parameteranpassung beliebig. Es läßt sich jedoch zeigen, daß für eine Parameteranpassung günstig sind, die etwas langsamer sind als 'optimale'.

Die Elemente der Sensitivitätsmatrix berechnen sich nach

$$\xi_{k+1,i} = \frac{\partial \hat{q}_k}{\partial \omega_i} = L_i^F \hat{q}_{k+1} + F \xi_{k,i} + L_i^B u_k$$

$$\left(L_i^F = \frac{\partial F}{\partial \omega_i} = \frac{\partial A_{dis}}{\partial \omega_i} \quad , \quad L_i^B = \frac{\partial B}{\partial \omega_i} \right)$$

Der Term $F \cdot \xi_{k,i}$ und damit $\xi_{k+1,i}$ wird umso größer, je größer die Eigenwerte von F sind. Das bedeutet, daß dann der Beobachter empfindlicher auf Parameterfehler reagiert und zu jedem Zeitpunkt $k \cdot \Delta t$ die zurückliegenden Zeitschritte bei der Anpassung (Optimie-

rung) stärker berücksichtigt werden. Der Zeitschritt $k-n$ geht mit der n -ten Potenz von F in die Sensitivitätsmatrix des k -ten Zeitschrittes ein. Bei betragsmäßig kleinen Eigenwerten von F (immer < 1) geht F sehr schnell gegen Null. Liegen die Eigenwerte von F nahe denen der Systemmatrix A bzw. Λ , dann ist H klein ($F = A - H C$), und an der Beobachtergleichung in der Form

$$\hat{\mathbf{q}}_{k+1} = \underbrace{\Lambda_k \hat{\mathbf{q}} + \mathbf{B}_k \mathbf{u}}_{\text{Modell der Strecke (modal)}} + \underbrace{H(\mathbf{y} - \mathbf{C} \hat{\mathbf{q}}_k)}_{\text{Korrekturglied}}$$

ist zu ersehen, daß in diesem Fall der Schwerpunkt auf der Simulation der Zustandsgrößen liegt und der Parameterfehler auch dadurch einen relativ großen Einfluß erhält. Außerdem kann bei dem "optimalen Beobachtern" der Fehler so klein werden, daß aus numerischen Gründen keine Parameteranpassung durchgeführt werden kann.

4.6 Zur Wahl des Gütekriteriums und der Wichtungsmatrix

4.6.1 Indirekte Parameteranpassung mit dem Beobachter

In allen im folgenden dargestellten Beispielrechnungen wird ein quadratisches Gütekriterium verwendet. Bei der indirekten Parameteranpassung mit dem Beobachter werden zuerst die Systemeigenfrequenzen optimiert und dann die Systemparameter an diese Eigenfrequenzen angepaßt.

Das zur Optimierung der Eigenfrequenzen verwendete Gütekriterium hat die Form:

$$J_F = \mathbf{v}_F^{*T} \mathbf{G}_F^* \mathbf{v}_F^* + \mathbf{v}_F^T \mathbf{G}_F \mathbf{v}_F \quad (4.29)$$

\mathbf{G}_F^* : Wichtung der Abweichung zwischen gerechneten und angepaßten Eigenfrequenzen

\mathbf{G}_F : Wichtung der Meßfehler

Mit den Fehlervektoren

$$\mathbf{v}_{F_1}^* = \omega_i - \hat{\omega}_i \quad (4.30)$$

$$\mathbf{v}_F^T = | \tilde{\mathbf{y}}_1^T \dots \tilde{\mathbf{y}}_k^T \dots \tilde{\mathbf{y}}_M^T | \quad (4.31)$$

$\hat{\omega}_i$: Eigenfrequenzen des a-priori Rechenmodells

ω_i : Eigenfrequenzen nach Minimierung des Beobachtungsfehlers

Bei entsprechend großer Wahl von $\hat{\mathbf{G}}_f^*$ läßt sich eine größere Abweichung der angepaßten Eigenfrequenzen von den Ausgangswerten verhindern. Man kann so abwägen zwischen dem Vertrauen, das man zu seinen Meßwerten hat und dem, das man zu dem a-priori Rechenmodell hat. Bei der anschließenden Parameteranpassung wurde für das Gütekriterium angesetzt:

$$J_a = \hat{\mathbf{v}}_a^{*T} \hat{\mathbf{G}}_a^* \hat{\mathbf{v}}_a^* + \mathbf{v}_a^T \mathbf{G}_a \mathbf{v}_a \quad (4.32)$$

$\hat{\mathbf{G}}_a^*$: Wichtung der Abweichung der angepaßten Korrekturparameter der Systemmatrizen von denen des Ausgangsmodells

\mathbf{G}_a : Wichtung der Frequenzabweichungen

$$\hat{\mathbf{v}}_a^* = \mathbf{a} - \hat{\mathbf{a}}^* \quad (4.33)$$

$$\mathbf{v}_{a_i} = \hat{\omega}_i - \omega_i \quad (4.34)$$

\mathbf{a} : angepaßte Korrekturparameter

$\hat{\mathbf{a}}^*$: Korrekturparameter des a-priori-Rechenmodells

ω_i : Eigenfrequenzen des angepaßten Rechenmodells

Mit $\hat{\mathbf{G}}_a^*$ läßt sich wieder eine größere Abweichung der angepaßten Korrekturparameter von den Ausgangswerten verhindern, mit $\hat{\mathbf{G}}_f^*$ kann man festlegen, wie stark die einzelnen Eigenfrequenzen bei der Parameteranpassung berücksichtigt werden. Zur Wahl von \mathbf{G}_a hat sich folgende Vorgehensweise als günstig erwiesen:

Mit der Systemgleichung unter Berücksichtigung der Störungen

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{B} \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C} \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$$

\mathbf{w}_k : Systemstörungen

\mathbf{v}_k : Meßstörungen

und mit

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{C} (\mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{B} \mathbf{u}_k) + \mathbf{C} \mathbf{w}_k + \mathbf{v}_k$$

läßt sich der Anteil der Störungen im Meßsignal abschätzen nach

$$\zeta = \mathbf{C} \mathbf{E} [\mathbf{w}_k] + \mathbf{E} [\mathbf{v}_k] \quad (4.35)$$

ζ : Erwartungswert der Störungen im Meßsignal

$\mathbf{H} \zeta$ gibt an, welchen Einfluß die Störungen auf die Beobachtung der einzelnen Eigenschwingungen haben. Bezieht man diesen Störeinfluß auf die maximale Anregung der Eigenschwingungen, so erhält man ein Maß für die Güte der Zustandsschätzung der einzelnen Eigenschwingungen und damit auch für das Vertrauen, das man zu der entsprechenden Eigenfrequenzschätzung haben kann. \mathbf{G}_a kann dementsprechend so angesetzt werden:

$$\mathbf{G}_a = \text{diag} \left| \frac{q_{\max_i} - \psi_i}{q_{\max_i}} \cdot \frac{1}{\omega_i^2} \right| \quad (4.36)$$

$$\phi = \mathbf{H} \eta$$

q_{\max_i} : maximale Anregung der i-ten Eigenfrequenz

Wird $q_{\max_i} - \psi_i$ kleiner Null, so ist G_{a_i} gleich Null zu setzen. Der Faktor $1/\omega_i^2$ bewirkt, daß prozentual gleiche Abweichungen der Eigenfrequenzen gleiche Anteile im Fehlerfunktional ergeben. Ohne diesen Faktor würden die hohen Frequenzen zu stark gewichtet. Mit diesen Überlegungen zeigt sich auch, daß der Term $\mathbf{v}_F^T \mathbf{G}_F \mathbf{v}_F$ im Gütekriterium zur Optimierung der Eigenfrequenzen eigentlich überflüssig ist, da eine größere Abweichung von dem a-priori Modell auch über \mathbf{G}_a bzw. \mathbf{G}_a^* vorgenommen werden kann.

4.6.2 Direkte Anpassung der Systemparameter

Bei der direkten Anpassung der Systemparameter wird das quadratische Gütekriterium angesetzt in der Form:

$$J = \mathbf{v}_a^{*T} \mathbf{G}_a^* \mathbf{v}_a^* + \mathbf{v}_F^T \mathbf{G}_F \mathbf{v}_F \quad (4.37)$$

\mathbf{G}_a^* : Wichtung der Abweichung der angepaßten Korrekturparameter der Systemmatrizen von denen des Ausgangsmodells

\mathbf{G}_F : Wichtung der Beobachtungsfehler

$$\mathbf{v}_a^* = \mathbf{a} - \mathbf{a}^*$$

\mathbf{a} : angepaßte Korrekturparameter

\mathbf{a}^* : Korrekturparameter des a-priori-Rechenmodells

$$\mathbf{v}_F^T = | \tilde{\mathbf{y}}_1^T, \dots, \tilde{\mathbf{y}}_k^T, \dots, \tilde{\mathbf{y}}_M^T |$$

Diese direkte Anpassung bietet nicht die Möglichkeit, bei der Parameteranpassung zu berücksichtigen, mit welcher Güte die einzelnen Eigenschwingungen beobachtet werden.

4.7 Bestimmung von Verstärkungsfaktoren des Eingangssignals mit Hilfe des Beobachtungsfehlers

Bei Messungen tritt häufig die Schwierigkeit auf, daß die Eingangserregung zwar gemessen werden kann, also der Form nach bekannt ist, aber die Amplitude nicht exakt zu bestimmen ist. Z.B. läßt sich der Verstärkungsfaktor der Meßgeräte nicht genau feststellen, oder die Erregung wird nicht direkt an der Stelle gemessen, an der sie auf das System einwirkt. In diesem Fall läßt sich ein Korrekturfaktor für die Systemeingangsmatrix durch eine Minimierung des Beobachtungsfehlers bestimmen. Die Herleitung der Beziehung für die Abhängigkeit des Korrekturfaktors von dem Beobachtungsfehler kann analog zu Abschnitt 4.3 durchgeführt werden. Es liegen r Eingangsgrößen vor. Die \mathbf{B} -Matrix soll spaltenweise (es können auch mehrere Spalten mit einem Parameter versehen werden) korrigiert werden, d.h. für jedes Eingangssignal kann ein Verstärkungsfaktor bestimmt werden.

Die Beobachtereingangsmatrix wird folgendermaßen angesetzt:

$$\mathbf{B}_{\text{kont}}^* = \left[a_1 \mathbf{b}_{\text{kont}_1}^* \cdot \cdot \cdot \cdot a_i \mathbf{b}_{\text{kont}_i}^* \cdot \cdot \cdot \cdot a_p \mathbf{b}_{\text{kont}_p}^* \right] \quad p \leq r \quad (4.38)$$

r : Anzahl der Eingangsgrößen

a_i : Korrekturparameter der Eingangsmatrix

$\mathbf{b}_{\text{kont}_i}^*$: eine oder mehrere Spalten der aus a-priori Kenntnissen gewonnenen Eingangsmatrix

Für das zeitdiskrete System gilt mit diesem Ansatz :

$$\mathbf{B}_{\text{dis}}^* = \left[a_1 \mathbf{b}_{\text{dis}_1}^* \cdot \cdot \cdot \cdot a_i \mathbf{b}_{\text{dis}_i}^* \cdot \cdot \cdot \cdot a_p \mathbf{b}_{\text{dis}_p}^* \right] \quad p \leq r \quad (4.39)$$

$\mathbf{b}_{\text{dis}_i}^*$: eine oder mehrere Spalten der aus a-priori Kenntnissen gewonnenen Eingangsmatrix des zeitdiskreten Systems

Für das modal transformierte, zeitdiskrete System erhält man damit :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\text{dis}}^* &= \Phi^{-1} \mathbf{B}_{\text{dis}}^* \\ &= \left[a_1 \Phi^{-1} \mathbf{b}_{\text{dis}_1}^* \cdot \cdot \cdot \cdot a_i \Phi^{-1} \mathbf{b}_{\text{dis}_i}^* \cdot \cdot \cdot \cdot a_p \Phi^{-1} \mathbf{b}_{\text{dis}_p}^* \right] \end{aligned} \quad (4.40)$$

Die Beobachtgleichung (hier modal transformiert) erhält damit die Form :

$$\hat{\mathbf{q}}_{k+1} = \mathbf{F} \hat{\mathbf{q}}_k + \mathbf{H} \mathbf{y}_k + \sum_{i=1}^p a_i \mathbf{b}_{\text{dis}_i}^* \mathbf{u}_{k_i} \quad (4.41)$$

\mathbf{u}_{k_i} : den Teilmatrizen $\mathbf{b}_{\text{dis}_i}^*$ entsprechende Teilvektoren von \mathbf{u}

Die Messung beginnt mit $\mathbf{u}_0, \mathbf{y}_0$.

$$\hat{\mathbf{q}}_1 = \mathbf{F} \hat{\mathbf{q}}_0 + \mathbf{H} \mathbf{y}_0 + \sum_{i=1}^p a_i \mathbf{b}_{dis_i}^* \mathbf{u}_{0i} \quad (4.42)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{q}}_1}{\partial a_i} = \mathbf{b}_{dis_i}^* \mathbf{u}_{0i} = \boldsymbol{\xi}_{1i} \quad (4.43)$$

Für einen beliebigen Zeitschritt k gilt :

$$\hat{\mathbf{q}}_{k+1} = \mathbf{F} \hat{\mathbf{q}}_k + \mathbf{H} \mathbf{y}_k + \sum_{i=1}^p a_i \mathbf{b}_{dis_i}^* \mathbf{u}_{ki} \quad (4.44)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{q}}_{k+1}}{\partial a_i} = \mathbf{F} \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}_k}{\partial a_i} + \mathbf{b}_{dis_i}^* \mathbf{u}_{ki} = \mathbf{F} \boldsymbol{\xi}_{ki} + \mathbf{b}_{dis_i}^* \mathbf{u}_{ki} = \boldsymbol{\xi}_{k+1i} \quad (4.45)$$

Mit den Gl. 4.42 bis 4.45 hat man eine Rekursionsformel zur Berechnung von $\boldsymbol{\xi}_k$ bestimmt. Die Ableitung des Beobachtungsfehlers nach den Korrekturfaktoren lautet :

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{y}}_k}{\partial a_i} = \mathbf{C} \boldsymbol{\xi}_{ki} \quad (4.46)$$

Ein großer Vorteil dieser Beziehung ist, daß die Korrekturfaktoren a_j in linearer Beziehung zum Beobachtungsfehler stehen und sich das Optimierungsverfahren von Abschnitt 3.2 direkt anwenden läßt. Die in den Bildern 6.20 und 6.21 und 7.10 und 7.11 dargestellten Versuchsergebnisse zeigen deutlich die Verbesserung des Beobachters durch eine solche Anpassung.

4.8 Bestimmung von Unwuchten mit Hilfe des Beobachtungsfehlers von Biegeschwingungen

Durch eine Minimierung des Beobachtungsfehlers an den Meßstellen bei einer Beobachtung der Biegeschwingungen einer rotierenden Welle lassen sich Unwuchten nach Betrag und Phase bestimmen. Das soll nun anhand von theoretischen Überlegungen und Simulationsrechnungen gezeigt werden. Es wird dabei vorausgesetzt, daß das Rechenmodell das reale System ansonsten richtig beschreibt. Die Differentialgleichung des unwuchterregten Systems lautet :

$$\mathbf{M} \ddot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{D} \dot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{K} \boldsymbol{\xi} = \sum_{i=1}^p \mathbf{f}_i u_i \quad (4.47)$$

p : Anzahl der Unwuchten

\mathbf{f}_i : Vektor, der den Ort der Unwucht festlegt

$$u_i = a_i \Omega^2 \cos(\Omega t + \varphi_i) \quad (4.48)$$

Ω : Drehzahl der Welle
 a_i : Betrag der i-ten Unwuchterregung
 φ_i : Phase der i-ten Unwuchterregung

Der Faktor Ω^2 wurde separat geschrieben, da die Unwuchtkräfte proportional zu Ω^2 sind. Nach trigonometrischer Umformung kann man auch schreiben :

$$\begin{aligned} u_i &= a_i \Omega^2 (\cos \Omega t \cos \varphi_i - \sin \Omega t \sin \varphi_i) \\ &= \tilde{a}_i \Omega^2 \cos \Omega t + \tilde{\tilde{a}}_i \Omega^2 \sin \Omega t \end{aligned} \quad (4.49)$$

mit

$$\tilde{a}_i = a_i \cos \varphi_i$$

$$\tilde{\tilde{a}}_i = -a_i \sin \varphi_i$$

oder umgekehrt, wenn \tilde{a}_i und $\tilde{\tilde{a}}_i$ bestimmt sind, lauten Betrag und Phase der Unwucht:

$$a_i = \sqrt{\tilde{a}_i^2 + \tilde{\tilde{a}}_i^2} \quad \varphi_i = \arctan\left(-\frac{\tilde{\tilde{a}}_i}{\tilde{a}_i}\right) \quad (4.50)$$

Nach Übergang zur Zustandsraumdarstellung gilt :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \xi \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \xi \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^p \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}_i \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_i} u_i \\ \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \sum_{i=1}^p \mathbf{B}_i u_i \end{aligned} \quad (4.51)$$

Nach der Modaltransformation und Reduktion der Freiheitsgrade erhält man

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A} \mathbf{q} + \sum_{i=1}^p \Phi^{-1} \mathbf{B}_i u_i$$

und im zeitdiskreten System

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{A}_{\text{dis}} \mathbf{q}_k + \sum_{i=1}^p \Phi^{-1} \mathbf{B}_{\text{dis}i} u_{k_i} \quad (4.52)$$

$$u_{k_i} = \tilde{a}_i \Omega^2 \cos(\Omega k \Delta t) + \tilde{\tilde{a}}_i \Omega^2 \sin(\Omega k \Delta t) \quad (4.53)$$

Die Beobachtergleichung lautet : (4.54)

$$\hat{\mathbf{q}}_{k+1} = \mathbf{F} \hat{\mathbf{q}}_k + \mathbf{H} \mathbf{y}_k + \sum_{i=1}^p \Phi^{-1} \mathbf{B}_{\text{dis}i} u_{k_i}$$

Beispiel :

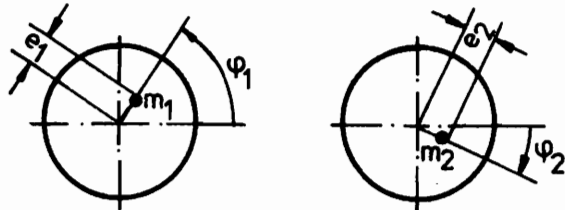
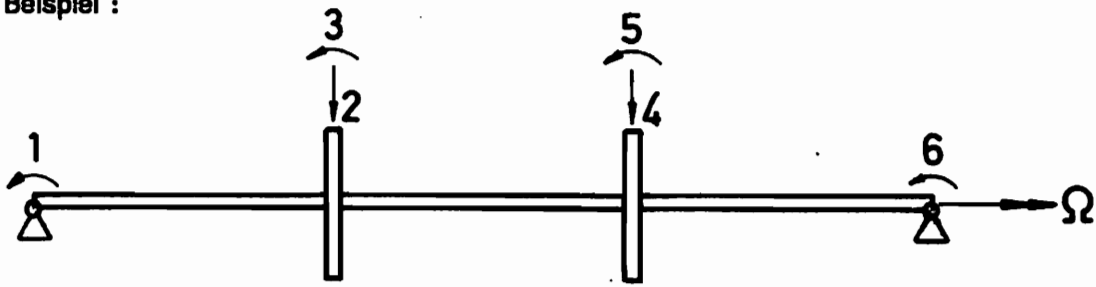


Bild 4.7 Beispiel einer Welle mit Unwucht

$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{a}_1 = m_1 e_1 \cos \varphi_1$$

$$\tilde{a}_2 = m_2 e_2 \cos \varphi_2$$

$$\tilde{\tilde{a}}_1 = -m_1 e_1 \sin \varphi_1$$

$$\tilde{\tilde{a}}_2 = -m_2 e_2 \sin \varphi_2$$

Die Sensitivitätsmatrix, d.h. die Ableitung des Beobachtungsfehlers nach \tilde{a}_i und $\tilde{\tilde{a}}_i$, läßt sich analog zu den vorhergehenden Abschnitten nach einem Rekursionsalgorithmus bestimmen.

Begonnen wird mit

$$\hat{\mathbf{q}}_1 = \mathbf{F} \hat{\mathbf{q}}_0 + \mathbf{H} \mathbf{y}_0 + \sum_{i=1}^P \Phi^{-1} \mathbf{B}_{dis_i} u_{0_i} \quad (4.55)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{q}}_1}{\partial \tilde{a}_i} = \tilde{\xi}_{k_i} = \Phi^{-1} \mathbf{B}_{dis_i} \Omega^2 \quad ; \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}_1}{\partial \tilde{\tilde{a}}_i} = \tilde{\tilde{\xi}}_{k_i} = \mathbf{0} \quad (4.56)$$

Für einen beliebigen Zeitschritt gilt

$$\hat{\mathbf{q}}_{k+1} = \mathbf{F} \hat{\mathbf{q}}_k + \mathbf{H} \mathbf{y}_k + \sum_{i=1}^p \Phi^{-1} \mathbf{B}_{\text{dis}_i} \Omega^2 (\tilde{a}_i \cos(\Omega k \Delta t) + \tilde{\tilde{a}}_i \sin(\Omega k \Delta t)) \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}_{k+1}}{\partial \tilde{a}_i} &= \tilde{\xi}_{k+1_i} = \mathbf{F} \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}_k}{\partial \tilde{a}_i} + \Phi^{-1} \mathbf{B}_{\text{dis}_i} \Omega^2 \cos(\Omega k \Delta t) \\ &= \mathbf{F} \tilde{\xi}_{k_i} + \Phi^{-1} \mathbf{B}_{\text{dis}_i} \Omega^2 \cos(\Omega k \Delta t) \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}_{k+1}}{\partial \tilde{\tilde{a}}_i} &= \tilde{\tilde{\xi}}_{k+1_i} = \mathbf{F} \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}_k}{\partial \tilde{\tilde{a}}_i} + \Phi^{-1} \mathbf{B}_{\text{dis}_i} \Omega^2 \sin(\Omega k \Delta t) \\ &= \mathbf{F} \tilde{\tilde{\xi}}_{k_i} + \Phi^{-1} \mathbf{B}_{\text{dis}_i} \Omega^2 \sin(\Omega k \Delta t) \end{aligned} \quad (4.59)$$

Faßt man \tilde{a}_i und $\tilde{\tilde{a}}_i$ zu einem Vektor zusammen

$$\mathbf{a}^T = | \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_p, \tilde{\tilde{a}}_1, \dots, \tilde{\tilde{a}}_p | \quad ,$$

und $\tilde{\xi}_{k_i}, \tilde{\tilde{\xi}}_{k_i}$ zu einer Matrix

$$\mathbf{\Xi}_k = | \tilde{\xi}_{k_1}, \dots, \tilde{\xi}_{k_p}, \tilde{\tilde{\xi}}_{k_1}, \dots, \tilde{\tilde{\xi}}_{k_p} | \quad ,$$

so erhält man die Sensitivitätsmatrix für einen Zeitschritt

$$\mathbf{Dv}_k = \frac{\partial \tilde{\mathbf{y}}_k}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{C} \Phi \mathbf{\Xi}_k \quad . \quad (4.60)$$

Mit

$$\tilde{\mathbf{y}}_{k+1} = \mathbf{C} \Phi_1 \hat{\mathbf{q}}_{k+1} - \mathbf{y}_{k+1}$$

läßt sich z.B. wieder der Optimierungsalgorithmus nach Abschnitt 3.2 anwenden. Anhand der in Tabelle 4.1 und in den Bildern 4.8 und 4.9 dargestellten Simulationsrechnungen soll für das oben beschriebene Beispiel gezeigt werden, wie eine solche Bestimmung von Unwuchten mit Hilfe eines Beobachters durchgeführt werden kann. Die Drehzahl muß sich während der Optimierungsrechnung verändern, da bei konstanter Drehzahl zu wenig Information für die Bestimmung mehrerer Unwuchten in dem Schwingungsverhalten einer Maschine enthalten ist. Die Rechnungen zeigen, daß schon eine Veränderung der Drehzahl von 49 Hz bis 51 Hz ausreicht. Die in Tabelle 4.1 aufgeführten Werte wurden mit Rechnungen gewonnen, bei denen die Drehzahl sehr schnell (innerhalb von 1 sec) von 50 Hz auf 30 Hz zurückging. Als Meßwert für den Beobachter wurde der 2. Freiheitsgrad verwendet. Die Eigenfrequenzen der beobachteten Welle liegen bei 40.7 Hz, 165 Hz, 406 Hz, 756 Hz, 1350 Hz und 1840 Hz. Es wurde wieder mit "modalen Beobachtern" gearbeitet. Tabelle 4.1 zeigt, daß die Güte der Unwuchtbestimmung mit dem Weg-

lassen höherer Eigenschwingungen bei dem Beobachterentwurf schnell abnimmt, d.h. es ist ein gutes Rechenmodell für eine solche Unwuchtbestimmung notwendig. Eine deutliche Verbesserung der Ergebnisse läßt sich durch eine Mittelung über mehrere Werte, die in unterschiedlichen Drehzahlbereichen gewonnen wurden, erreichen.

	Scheibe 1		Scheibe 2	
	Ampl.	Phase	Ampl.	Phase
vorgegebene Unwuchten (Simulation des Systems)	100.50	-84.29	42.43	-45.00
identifizierte Unwuchten (12 Beobachterfreiheitsgr.)	100.50	-84.29	42.43	-45.00
identifizierte Unwuchten (10 Beobachterfreiheitsgr.)	100.57	-84.29	42.36	-44.93
identifizierte Unwuchten (8 Beobachterfreiheitsgr.)	97.06	-85.15	45.97	-46.15
identifizierte Unwuchten (6 Beobachterfreiheitsgr.)	93.09	-84.11	48.11	-50.64
identifizierte Unwuchten (4 Beobachterfreiheitsgr.)	93.41	-83.90	47.57	-50.80

Tabelle 4.1 Identifikation von Unwuchten - Beobachterentwurf mit unterschiedlichen Anzahlen von Eigenschwingungen

durchgezogen : Beobachter
gestrichelt (lange Striche) : Meßwert
dünn durchgezogen : Beobachtungsfehler
2. Freiheitsgrad
Meßzeit : $T = 1$ sec

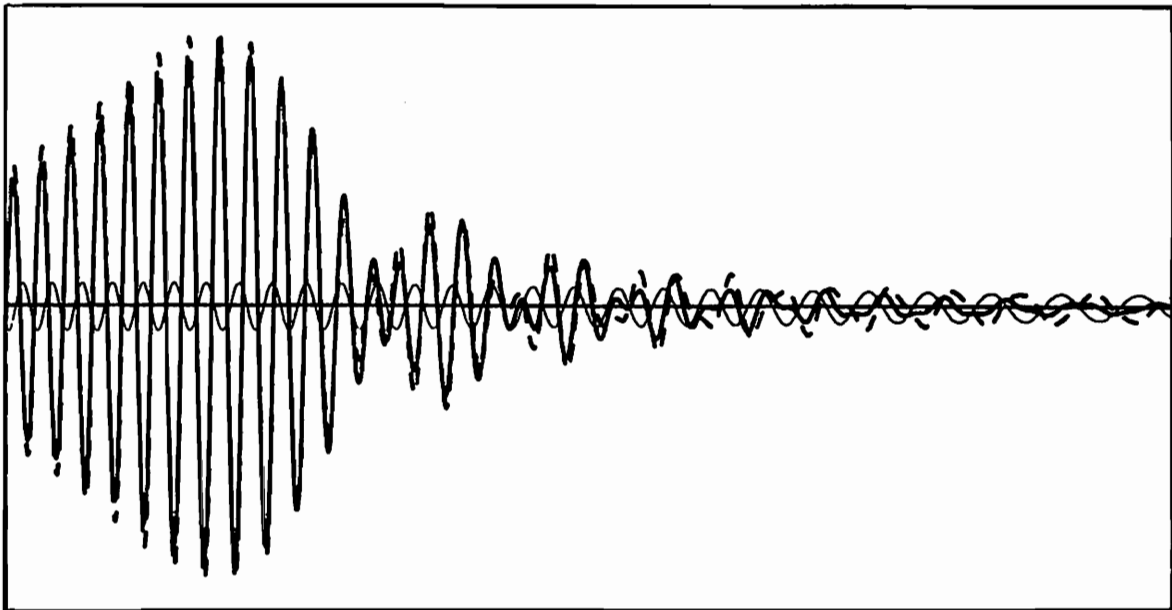


Bild 4.8 Beobachter ohne Berücksichtigung der Unwuchten

durchgezogen : Beobachter
 gestrichelt (lange Striche) : Meßwert
 dünn durchgezogen : Beobachtungsfehler

2. Freiheitsgrad
 Meßzeit : $T = 1 \text{ sec}$

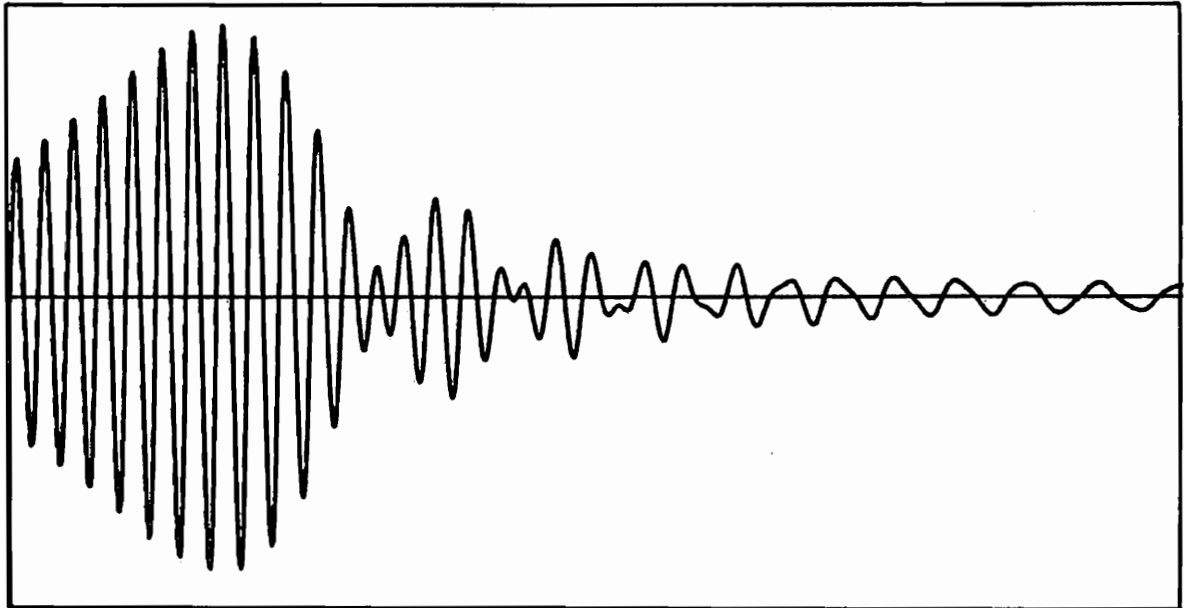


Bild 4.9 Beobachter mit Berücksichtigung der Unwuchten

4.9 Bestimmung einer konstanten Verschiebung des Eingangssignals

Eine konstante Abweichung des tatsächlich vorhandenen Eingangssignals von dem, das für die Beobachterrechnung verwendet wird (z.B. verursacht durch Meßfehler), läßt sich ebenfalls über eine Minimierung des Beobachtungsfehlers bestimmen. Das Eingangssignal wird nach der Gleichung

$$\hat{\mathbf{u}}_k^* = \mathbf{u}_k + \mathbf{a} \quad (4.61)$$

\mathbf{a} : Vektor, der die konstanten Verschiebungen des Eingangssignals enthält

angesetzt. Die Beobachtergleichung (hier modal transformiert) erhält damit die Form:

$$\hat{\mathbf{q}}_{k+1} = \mathbf{F} \hat{\mathbf{q}}_k + \mathbf{H} \mathbf{y}_k + \mathbf{B}_{\text{dis}}^* (\mathbf{u}_k + \mathbf{a})$$

Die Messung beginnt mit $\mathbf{u}_0, \mathbf{y}_0$.

$$\hat{\mathbf{q}}_1 = \mathbf{F} \hat{\mathbf{q}}_0 + \mathbf{H} \mathbf{y}_0 + \mathbf{B}_{\text{dis}}^* (\mathbf{u}_0 + \mathbf{a})$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{q}}_1}{\partial a_i} = \mathbf{B}_{\text{dis}}^* = \boldsymbol{\xi}_{1,i} \quad (4.62)$$

Für einen beliebigen Zeitschritt k gilt :

$$\hat{\mathbf{q}}_{k+1} = \mathbf{F} \hat{\mathbf{q}}_k + \mathbf{H} \mathbf{y}_k + \mathbf{B}_{\text{dis}}^* (\mathbf{u}_k + \mathbf{a})$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{q}}_{k+1}}{\partial \mathbf{a}_i} = \mathbf{F} \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}_k}{\partial \mathbf{a}_i} + \mathbf{B}_{\text{dis}}^* = \mathbf{F} \boldsymbol{\xi}_{k_i} + \mathbf{B}_{\text{dis}}^* = \boldsymbol{\xi}_{k+1_i} \quad (4.63)$$

Mit den Gl. 4.62 und 4.63 hat man eine Rekursionsformel zur Berechnung von $\boldsymbol{\xi}_k$ bestimmt. Die Ableitung des Beobachtungsfehlers nach den Korrekturfaktoren lautet :

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{y}}_k}{\partial \mathbf{a}_i} = \mathbf{C} \boldsymbol{\xi}_{k_i}$$

4.10 Gleichzeitige Schätzung des Systemzustandes und unbekannter Parameter mit Hilfe des erweiterten Kalman Filters

Mit dem erweiterten Kalman Filter läßt sich zusätzlich zur Zustandsschätzung bei jedem Zeitschritt rekursiv eine Parameterschätzung durchführen und das Rechenmodell verbessern. Besonders im Hinblick auf eine Schadensfrüherkennung bietet dieses Verfahren eine sehr elegante Möglichkeit zur Überwachung von Systemparametern. Ein Nachteil ist der große Rechenaufwand bei jedem Zeitschritt, so daß eine Anwendung bei sehr schnellen Vorgängen und großen Systemen nicht möglich ist. Eine Untersuchung der Konvergenzeigenschaften des erweiterten Kalman Filters wurden von L. Ljung in /27/ durchgeführt. Sie werden i.a. als nicht gut angesehen.

Hier soll gezeigt werden, wie ein erweiterter Kalman Filter nach der Reduktion der Freiheitsgrade mit Hilfe der Modaltransformation zur gleichzeitigen Schätzung von Zustandsgrößen und Eigenfrequenzen (oder Dämpfungen) eingesetzt werden kann. Mit Simulationsrechnungen des eingespannten beschädigten Biegebalkens wird zum Schluß dieses Abschnitts ein Beispiel für die Anwendung dieses Verfahren gegeben. Hierbei zeigte sich auch, wie wichtig die Reduktion der Freiheitsgrade bei der Anwendung solcher Verfahren auf strukturdynamische Probleme ist, da ansonsten schon dies einfache Balkenmodell auf extrem große Rechenzeiten geführt hätte. Zur Herleitung des Verfahrens des erweiterten Kalman-Filters werden die Zustandsschätzung und die Parameterschätzung zusammengefaßt.

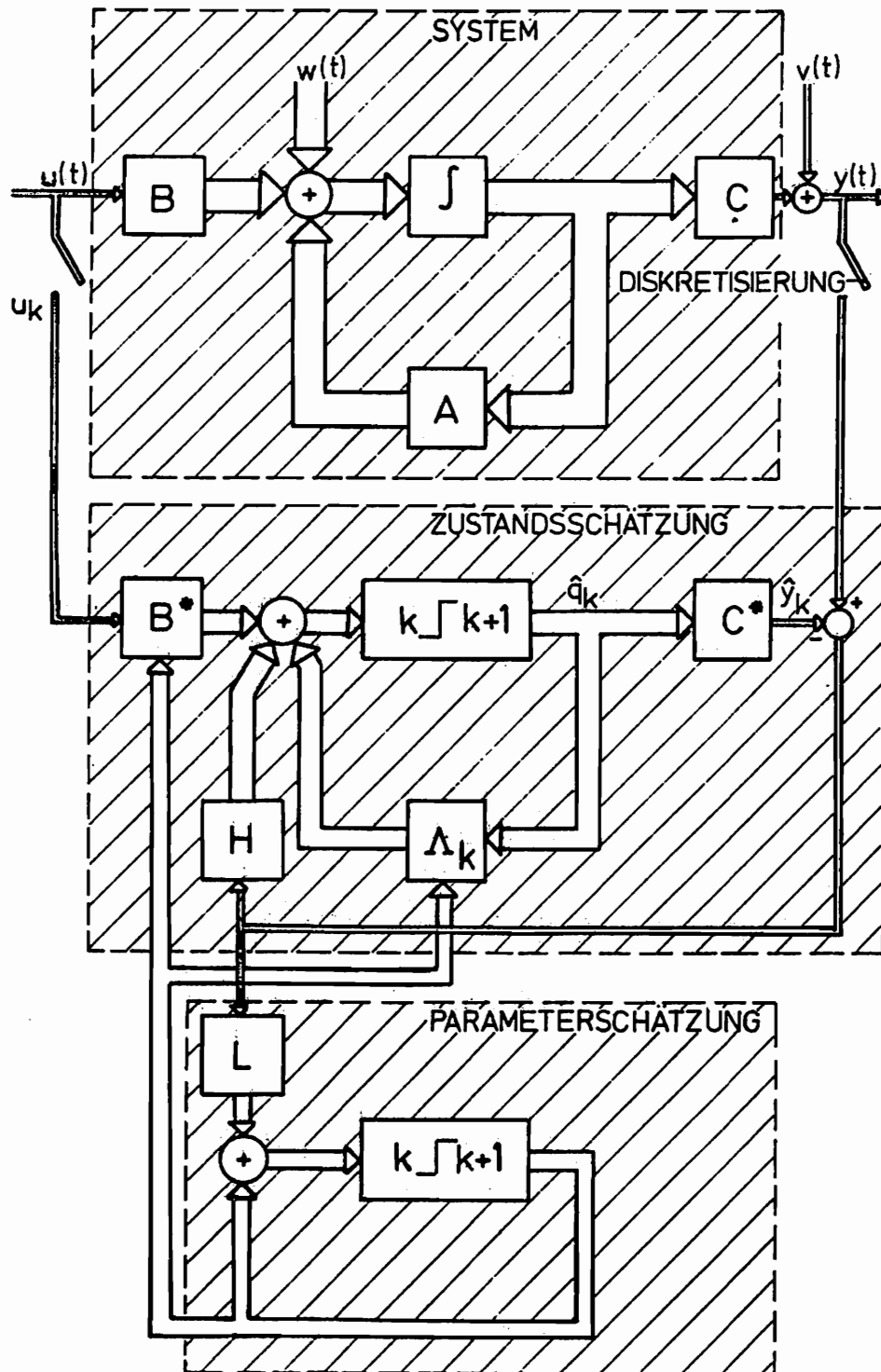


Bild 4.10 Erweiterter Kalman Filter

Mit der Systemgleichung für das modal transformierte (und reduzierte) System

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{q}_k + \mathbf{B} \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \quad (4.64)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C} \Phi \mathbf{q}_k + \mathbf{v}_k \quad (4.65)$$

\mathbf{w}_k : stochastische Störungen des Systems

\mathbf{v}_k : stochastische Meßfehler

und dem Parametervektor \mathbf{a} erhält man folgendes nichtlineares Schätzproblem:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{q}_{k+1} \\ \mathbf{a}_{k+1} \end{pmatrix}}_{\mathbf{z}_{k+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{A}_k(\mathbf{a}_k) \mathbf{q}_k + \mathbf{B}(\mathbf{a}_k) \mathbf{u}_k \\ \mathbf{a}_k \end{pmatrix}}_{f(\mathbf{z}_k, \mathbf{u}_k)} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{w}_k \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}}_{\mathbf{w}_k^*} \quad (4.66)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}^* \mathbf{z}_k \quad (4.67)$$

$$\mathbf{C}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \Phi & \mathbf{0} \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{z}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_k \\ \mathbf{a}_k \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{w}_k^* = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_k \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

\mathbf{a}_k : Parametervektor (enthält z.B. die gesuchten Eigenfrequenzen, Dämpfungen, Faktoren für Elementsteifigkeiten)

Normalerweise ist ein Kalman-Filter nur für lineare Systeme zu entwerfen. Der erweiterte Kalman-Filter (EKF-Extended Kalman-Filter) läßt sich durch eine Linearisierung um die jeweils letzte Zustandsschätzung auch auf nichtlineare Systeme anwenden.

Die Meßmatrix \mathbf{C}^* wird hier im Unterschied zu allgemeineren Betrachtungen zur Vereinfachung der Gleichungen als konstant angenommen. Bei den hier betrachteten strukturdynamischen Problemen wird das in der Regel auch der Fall sein. Die nichtlineare Systemgleichung 4.66 wird nun linearisiert, indem $f(\mathbf{z}_k, \mathbf{u}_k)$ in einer nach dem zweiten Glied abgebrochenen Taylorreihe um die letzte Schätzung $\hat{\mathbf{z}}_k$ entwickelt wird.

$$f(\mathbf{z}_k, \mathbf{u}_k) = f(\hat{\mathbf{z}}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{F}_k (\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_k)$$

$$\mathbf{F}_{k_{ij}} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial z_{kj}} \right|_{z_{kj} = \hat{z}_{kj}}$$

Damit wird aus Gl. 4.66

$$\mathbf{z}_{k+1} = f(\hat{\mathbf{z}}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{F}_k \mathbf{z}_k^* + \mathbf{w}_k^*$$

$$\mathbf{z}_k^* = \mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_k$$

Mit

$$\mathbf{z}_{k+1}^* = \mathbf{z}_{k+1} - f(\hat{\mathbf{z}}_k, \mathbf{u}_k)$$

erhält man für den Schätzfehler des Zeitschritts $k+1$

$$\mathbf{z}_{k+1}^* = \mathbf{F}_k \mathbf{z}_k^* + \mathbf{w}_k^*$$

eine linearisierte Systemgleichung, für die ein herkömmlicher Kalman-Filter entworfen werden kann. Es ist zu beachten, daß der Beobachter für \mathbf{z}_k^* entworfen wird, d.h. für die Abweichung um den Punkt, um den linearisiert wurde.

Die Beobachtungsgleichung lautet dann

$$\hat{\mathbf{z}}_{k+1}^* = F_k \hat{\mathbf{z}}_k^* + N_k (\mathbf{y}_k^* - \mathbf{C}^* \hat{\mathbf{z}}_k^*)$$

Mit

$$\mathbf{y}_k^* = \mathbf{y}_k - \mathbf{C}^* \hat{\mathbf{z}}_k^*$$

$$\hat{\mathbf{z}}_{k+1}^* = \hat{\mathbf{z}}_{k+1} - f(\hat{\mathbf{z}}_k, \mathbf{u}_k)$$

erhält man nach einigen Umformungen

$$\hat{\mathbf{z}}_{k+1} = f(\hat{\mathbf{z}}_k, \mathbf{u}_k) + N_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}^* \hat{\mathbf{z}}_k) \quad (4.68)$$

Die Varianzen des erweiterten Systems berechnen sich nach

$$\mathbf{V}_1^* = \begin{vmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} ; \quad \mathbf{V}_{12}^* = \begin{vmatrix} V_{12} \\ 0 \end{vmatrix} ; \quad \mathbf{Q}_0^* = \begin{vmatrix} Q_0 & 0 \\ 0 & \Sigma_k \end{vmatrix} \quad (4.69)$$

Q_0 : Startwert für die Varianzen des Schätzfehlers der Zustandsgrößen

Σ_0 : Startwert für die Varianzen des Parameterschätzfehlers

$$\mathbf{V}_1 = E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T] \quad \text{Varianz des Systemrauschens} \quad (4.70a)$$

$$\mathbf{V}_2 = E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T] \quad \text{Varianz des Meßrauschens} \quad (4.70b)$$

$$\mathbf{V}_{12} = E[\mathbf{w}_k \mathbf{v}_k^T] \quad (4.70c)$$

$$\mathbf{Q}_k = E[(\hat{\mathbf{z}}_k - \mathbf{z}_k)(\hat{\mathbf{z}}_k - \mathbf{z}_k)^T] \quad \text{Varianz des Schätzfehlers} \quad (4.70d)$$

Wird für die obige Gleichung 4.68 ein Kalman-Filter entworfen, so läßt sich N_k folgendermaßen bestimmen

$$N_k = (F_k Q_k \mathbf{C}^{*T} + \mathbf{V}_{12}^*) (\mathbf{C}^* Q_k \mathbf{C}^{*T} + V_2)^{-1} \quad (4.71)$$

$$Q_{k+1} = F_k Q_k F_k^T + \mathbf{V}_1^* - N_k (\mathbf{C}^* Q_k \mathbf{C}^{*T} + V_2) N_k^T \quad (4.72)$$

Mit

$$f(\mathbf{z}_k, \mathbf{u}_k) = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_k(\mathbf{a}_k) \mathbf{q}_k + \mathbf{B}_k(\mathbf{a}_k) \mathbf{u}_k \\ \mathbf{a}_k \end{vmatrix} ; \quad \mathbf{z}_k = \begin{vmatrix} \mathbf{q}_k \\ \mathbf{a}_k \end{vmatrix}$$

läßt sich F_k ($F_{k_{ij}} = \frac{\partial f_i}{\partial a_j}$) schreiben als

$$F_k = \begin{vmatrix} A_k & M_k \\ 0 & I \end{vmatrix}$$

$$M_{k_{ij}} = \frac{\partial q_{k+1i}}{\partial a_j}$$

Die Matrix M_k entspricht somit den in Abschnitt 4.2, 4.3, 4.7 oder 4.6 hergeleiteten Funktionalmatrizen der Ableitungen des Beobachtungsfehlers nach den gesuchten Parametern.

Mit diesen Größen läßt sich nun ein erweiterter Kalman-Filter berechnen. Mit

$$N_k = \begin{vmatrix} H_k \\ L_k \end{vmatrix} \quad \hat{Q}_k = \begin{vmatrix} Q_k & P_k \\ P_k & \Sigma_k \end{vmatrix} \quad (4.73)$$

lassen sich die Gleichungen auch explizit aufgelöst schreiben

$$\hat{q}_{k+1} = A_k \hat{q}_k + B_k u_k + H_k (y_k - C \hat{q}_k) \quad (4.74)$$

$$\hat{a}_{k+1} = \hat{a}_k + L_k (y_k - C \hat{q}_k) \quad (4.75)$$

$$H_k = (A_k Q_k C + M_k P_k^T C^T + V_{12}) S_k^{-1} \quad (4.76)$$

$$L_k = P_k C^T S_k^{-1} \quad (4.77)$$

$$S_k = C Q_k C^T + V_2$$

$$Q_{k+1} = A_k Q_k A_k^T + A_k P_k M_k^T + M_k P_k A_k^T + M_k V_2 M_k^T - H_k S_k H_k^T + V_{12} \quad (4.78)$$

$$P_{k+1} = A_k P_k + M_k \Sigma_k - H_k S_k L_k^T \quad (4.79)$$

$$\Sigma_{k+1} = \Sigma_k - L_k S_k L_k^T \quad (4.80)$$

Wie schon erwähnt, weist der Algorithmus des erweiterten Kalman-Filters schlechte Konvergenzeigenschaften auf. So führen falsch gewählte Parameter zur Beschreibung der Störungen auf einen Bias bei der Parameterschätzung. Aus diesem Grund wurde die von Ljung in /27/ vorgeschlagene Modifikation des erweiterten Kalman-Filters angewendet. Diese Modifikation berücksichtigt bei der Bestimmung der M -Matrix (Abhängigkeit des geschätzten Zustandsvektors von geschätzten Parametern), daß auch die Beobachtermatrix H_k von den gesuchten Parametern abhängt ($H_k = H_k(\hat{a}_k)$).

Es ist also der Term

$$\mathbf{g}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{H}_k}{\partial \mathbf{a}} \right|_{\mathbf{a} = \hat{\mathbf{a}}_k} (\mathbf{y}_k - \mathbf{C} \Phi \mathbf{q}_k) \quad (4.81)$$

zu der Sensitivitätsmatrix \mathbf{M}_k hinzuzuaddieren

$$\mathbf{M}_k^* = \mathbf{M}_k + \mathbf{g}_k \quad (4.82)$$

und dann \mathbf{M}_k^* anstelle von \mathbf{M}_k in den Algorithmus (Gl. 4.74 bis 4.80) einzusetzen. Außerdem ist in Gl. 4.76 \mathbf{S}_k durch die Einheitsmatrix \mathbf{I} zu ersetzen.

Die Ableitung der Beobachtermatrix \mathbf{H}_k nach dem aktuellen Parametervektor \mathbf{a}_k läßt sich folgendermaßen berechnen :

$$\left. \frac{\partial \mathbf{H}_k}{\partial a_j} \right|_{a_j = \hat{a}_{k_j}} = \mathbf{x}_{k_j} = [\Psi_{k_j} \mathbf{P}_k \Phi^T \mathbf{C}^T + \Lambda_k \Pi_{k_j} \Phi^T \mathbf{C}^T] \mathbf{S}_k^{-1} - \mathbf{H}_k \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{C} \Phi \Pi_{k_j} \Phi^T \mathbf{C}^T \mathbf{S}_k^{-1} \quad (4.83)$$

$$\Psi_{k+1_j} = \left. \frac{\partial \Lambda_k}{\partial a_j} \right|_{a_j = \hat{a}_{k_j}} \quad (4.84)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{k+1_j} = & \Psi_{k_j} \mathbf{P}_k \Lambda_k^T + \Lambda_k \Pi_{k_j} \mathbf{A}_k^T + \Lambda_k \mathbf{P}_k \Psi_{k_j}^T - \mathbf{x}_{k_j} \mathbf{S}_k \mathbf{H}_k^T \\ & - \mathbf{H}_k \mathbf{C} \Phi \Pi_{k_j} \Phi^T \mathbf{C}^T \mathbf{H}_k^T - \mathbf{H}_k \mathbf{S}_k \mathbf{x}_{k_j} \end{aligned} \quad (4.85)$$

Ist \mathbf{A} die modal transformierte Systemmatrix Λ und enthält der Parametervektor \mathbf{a} die Eigenfrequenzen, bzw. Dämpfungen des Systems, dann läßt sich Ψ_{k+1} nach Gl. 4.14, bzw. 4.20 bestimmen.

\mathbf{M}_k^* berechnet sich nach

$$\mathbf{M}_k^* = \mathbf{M}_k + \mathbf{g}_k = \mathbf{M}_k + \left| \mathbf{x}_{k_1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{C} \Phi \hat{\mathbf{x}}_k), \dots, \mathbf{x}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{C} \Phi \hat{\mathbf{x}}_k), \dots, \mathbf{x}_{k_N} (\mathbf{y}_k - \mathbf{C} \Phi \hat{\mathbf{x}}_k) \right|$$

Wenn sich das System mit den Gleichungen 4.64 , 4.65 und 4.71 beschreiben läßt, dann konvergiert dieser Algorithmus gegen ein lokales Minimum des Beobachtungsfehlers (quadratisches Gütekriterium). Der Nachteil dieser Modifikation ist, daß mit der Konvergenzverbesserung ein wesentlich größerer Rechenaufwand notwendig wird.

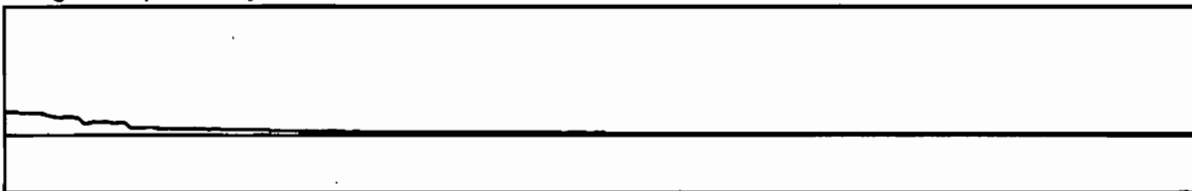
Im folgenden sind Ergebnisse von Simulationsrechnungen dargestellt, bei denen der Algorithmus des erweiterten Kalman-Filters eingesetzt wurde, um bei dem in Bild 2.5 gezeigten Balkenmodell ein Balkenelement mit verminderter Steifigkeit aufzufinden. Es wurde so vorgegangen, daß bei der Schwingungssimulation die Steifigkeit des 2. Balkenelements um 10 % vermindert wurde. Die Beobachterrechnung wurde mit den Parametern des unbeschädigten Balkens begonnen. Der Parametervektor enthält die System-

eigenfrequenzen, die im Laufe der Rechnung an die Eigenfrequenzen des beschädigten Balkens angepaßt werden sollten. In jedem Zeitschritt wurden in der Systemmatrix des modal transformierten Beobachters die Eigenfrequenzen durch die angepaßten Werte ersetzt. System- und Meßstörungen sind mit Hilfe eines Rauschgenerators (weißes Rauschen) simuliert worden. Der verwendete "modale Beobachter" berücksichtigte 4 Eigenschwingungen (8 Beobachterfreiheitsgrade). Als Meßwert sind die Schwingungen des 7.Freiheitsgrades benutzt worden.

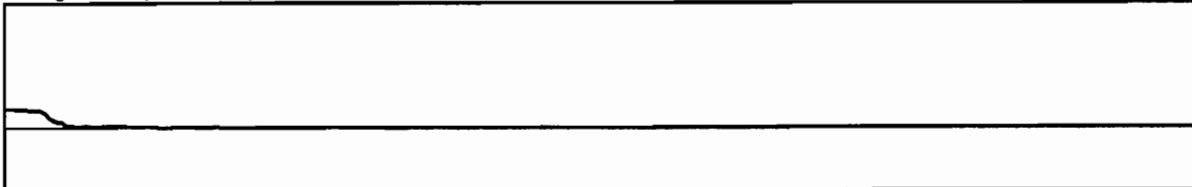
Die Rechnungen sind für freie und für erregte Balkenschwingungen durchgeführt worden. In den Bildern 4.11 und 4.15 sind die Zeitverläufe der prozentualen Abweichungen der mit dem EKF bestimmten Eigenfrequenzen von den "richtigen" Eigenfrequenzen des Rechenmodells dargestellt. Es zeigt sich, daß sich die ersten beiden Eigenfrequenzen gut anpassen lassen, während sich die 3. wenig verändert und die 4. Eigenfrequenz fast konstant bleibt. Sie wurde deshalb in Bild 4.15 nicht dargestellt. Die ersten beiden Eigenfrequenzen werden auch am stärksten angeregt. Besonders bei den freien Balkenschwingungen (Bild 4.11) wird die Verringerung des Beobachtungsfehlers während der Eigenfrequenzanpassung mit dem EKF deutlich.

dick durchgezogen : Zeitverlauf der Eigenfrequenz Anzahl der Zeitschritte : 1000
dünn durchgezogen : 0% Abweichung Meßzeit : 0.25 sec
dargestellter Bereich : -10% Abweichung bis 20% Abweichung

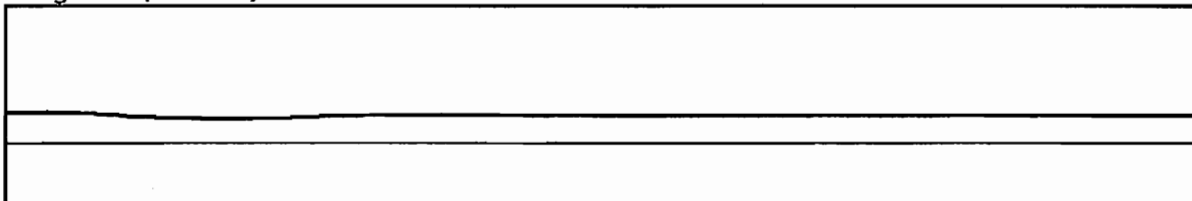
1. Eigenfrequenz (System : 49 Hz)



2. Eigenfrequenz (System : 115 Hz)



3. Eigenfrequenz (System : 249 Hz)



4. Eigenfrequenz (System : 477 Hz)

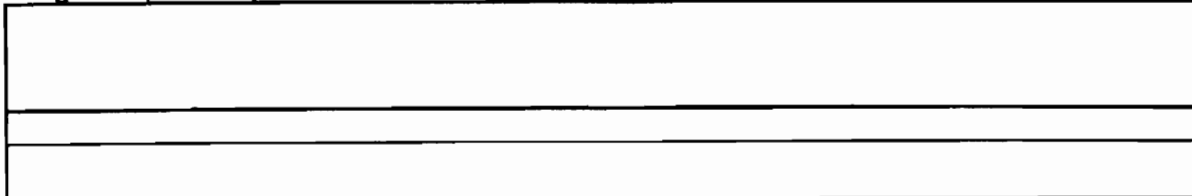


Bild 4.11 Eigenfrequenzanpassung mit dem EKF bei freien Balkenschwingungen

dick durchgezogen : Beobachter (7. Freiheitsgrad)
dünn durchgezogen : Meßwert und Beobachtungsfehler

Anzahl der Zeitschritte : 1000
Meßzeit : 0.25 sec

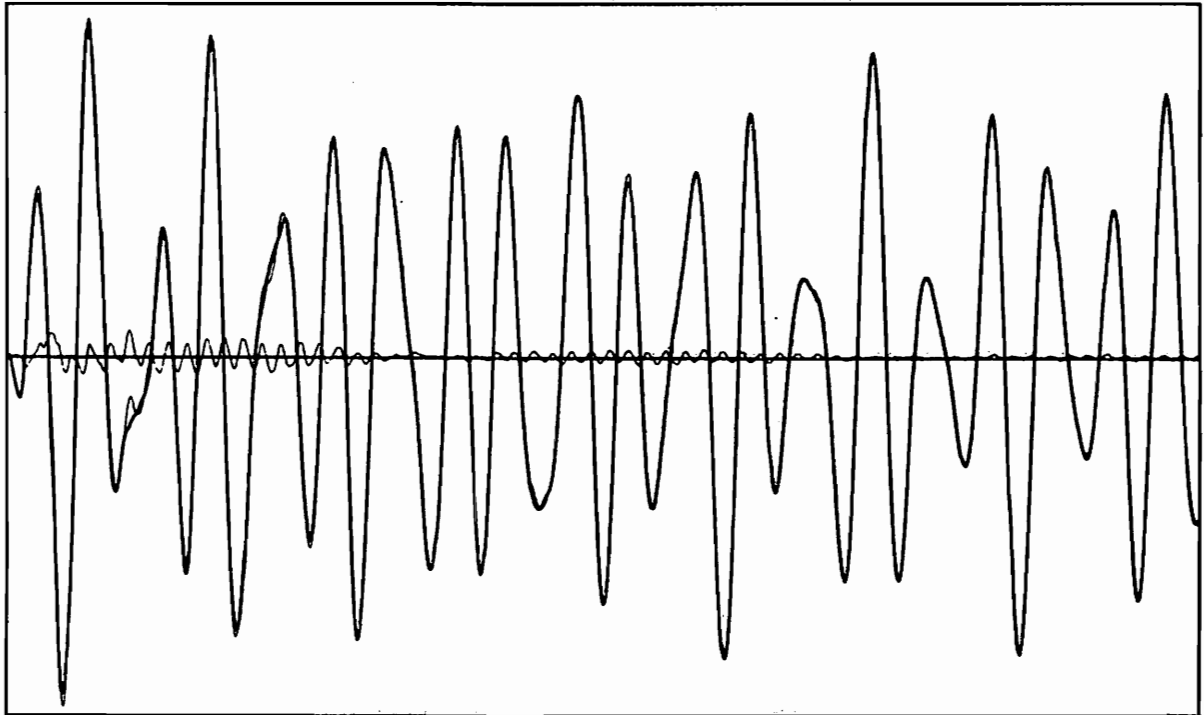


Bild 4.12 Simulationsrechnung der Beobachtung freier Balkenschwingungen mit dem ÉKF

Dick durchgezogen : Erregung und Beobachtungsfehler

Anzahl der Zeitschritte : 1000
Meßzeit : 0.25 sec

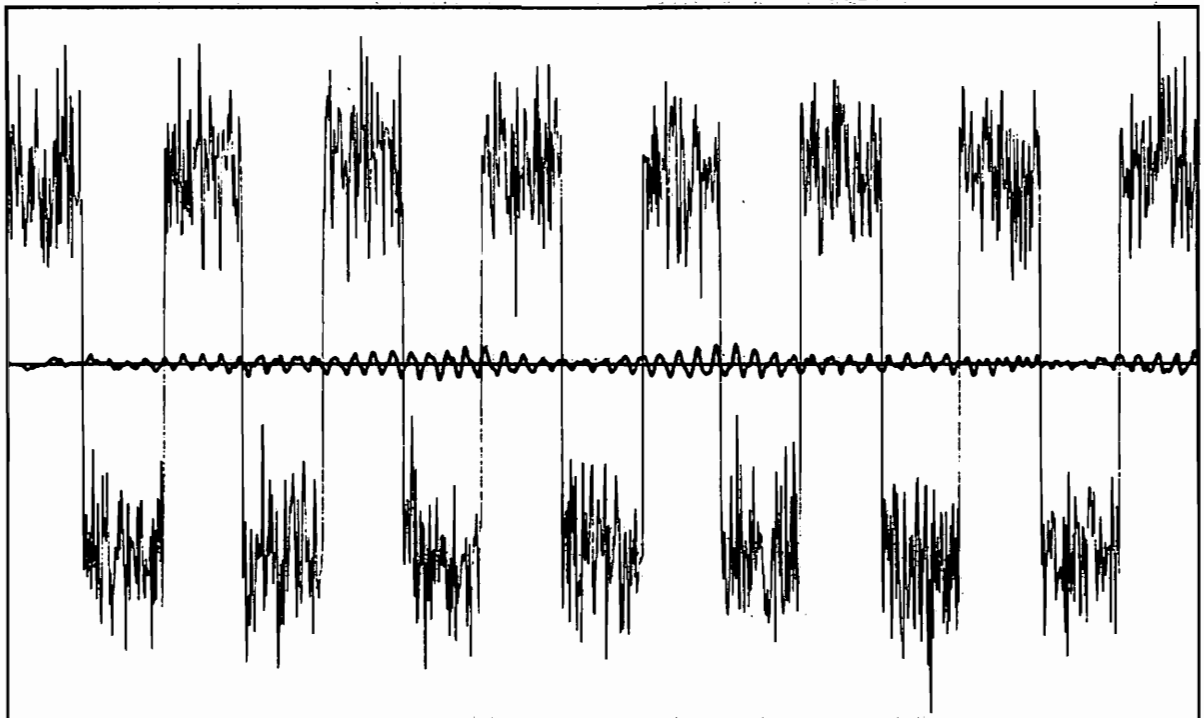


Bild 4.13 Erregung der Balkenschwingungen

dick durchgezogen : Beobachter (7. Freiheitsgrad)
dünn durchgezogen : Meßwert und Beobachtungsfehler

Anzahl der Zeitschritte : 1000
Meßzeit : 0.25 sec

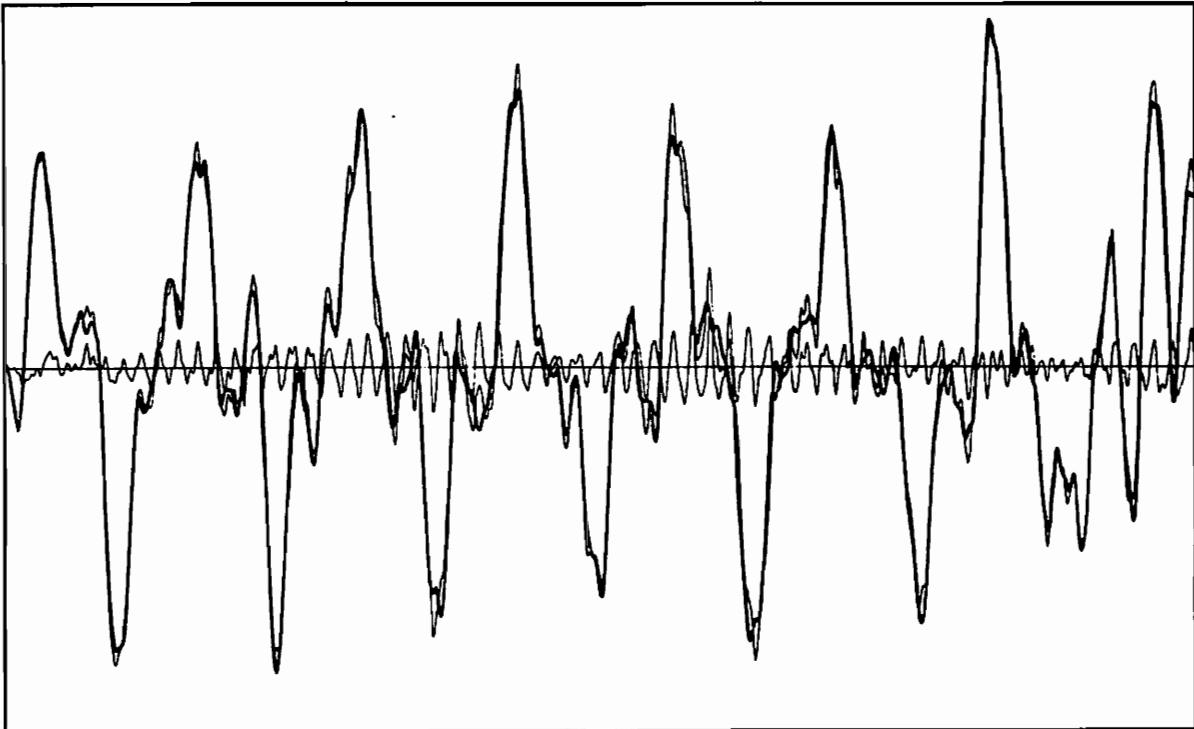
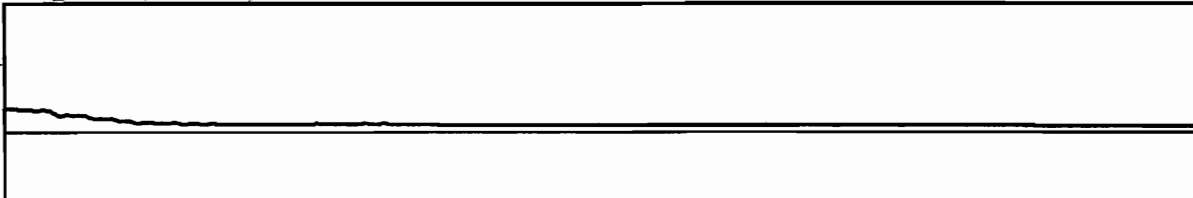


Bild 4.14 Simulationsrechnung der Beobachtung erregter Balkenschwingungen mit dem EKF

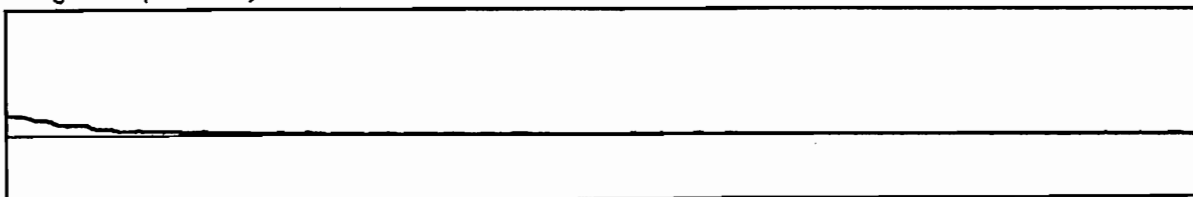
dick durchgezogen : Zeitverlauf der Eigenfrequenz
dünn durchgezogen : 0% Abweichung
dargestellter Bereich : -10% Abweichung bis 20% Abweichung

Anzahl der Zeitschritte : 1000
Meßzeit : 0.25 sec

1. Eigenfrequenz (System : 49 Hz)



2. Eigenfrequenz (System : 115 Hz)



3. Eigenfrequenz (System : 249 Hz)

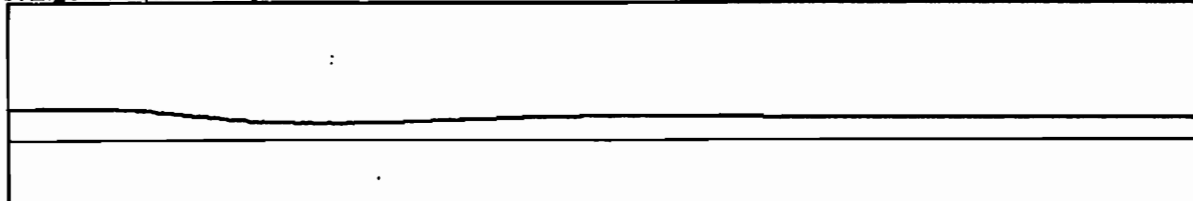


Bild 4.15 Eigenfrequenzanpassung mit dem EKF bei erregten Balkenschwingungen

5. Untersuchung der Störempfindlichkeit der Parameteranpassung mit Hilfe von Simulationsrechnungen

5.1 Allgemeines

In Abschnitt 4 ist beschrieben, wie Korrekturparameter der Steifigkeitsmatrix über eine Minimierung des Beobachtungsfehlers bestimmt werden können. Die Bilder 4.3 bis 4.5 zeigen die Verbesserung des Beobachters durch eine solche Parameteranpassung. Da bei Messungen an realen Systemen weder davon ausgegangen werden kann, daß die Meßwerte ohne Störungen gewonnen werden können, noch daß sämtliche Eingangsgrößen, die das System zu Schwingungen anregen, exakt bekannt sind, wurde mit Hilfe von Simulationsrechnungen untersucht, wie stark die Anpassung der Korrekturparameter der Steifigkeitsmatrix durch Störungen beeinflusst wird. Als Störungen wurden simuliert:

- weißes Rauschen auf dem Meßsignal
- weißes Rauschen als unbekannte Eingänge des Systems

Es wurde wieder der einseitig eingespannte Biegebalken simuliert, der an seinem freien Ende eine Wegerregung erfährt. Die Dämpfung wurde als geschwindigkeitsproportionale Diagonalmatrix angesetzt.

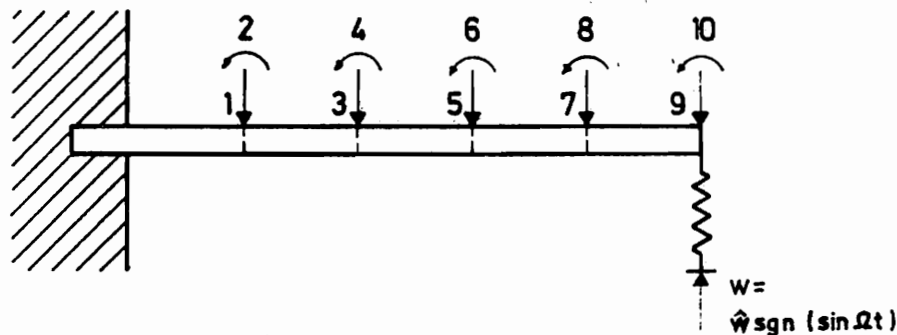


Bild 5.1 Balkenmodell für die Simulationsrechnungen

Der Balken wurde mit 5 Elementen diskretisiert. Um eine Beschädigung des Balkens zu simulieren, wurde die Steifigkeit des 2. Balkenelementes um 20% reduziert. Es ergaben sich die Eigenwerte nach Tabelle 5.1.

	Eigenwert Nr.			
	1	2	3	4
Eigenfrequenz [Hz]	18.6	89.0	243	486
Dämpfung [1/sec]	0.47	1.45	3.10	5.22

Tabelle 5.1 Eigenwerte des simulierten Balkens

Der verwendete "modale Beobachter" arbeitet mit 4 Eigenschwingungen, d.h. mit 8 Freiheitsgraden. Da mit den Simulationsrechnungen zusätzlich untersucht werden sollte, welchen Einfluß das dynamische Verhalten des Beobachters auf die Parameteranpassung hat, wurde der Beobachter nach dem Verfahren entworfen, dem die Eigenwerte der Beobachtermatrix F vorgegeben werden können (s./4/). Sie wurden jeweils als Vielfache der Systemeigenwerte vorgegeben. Die Faktoren sind bei den einzelnen Rechenergebnissen angegeben.

Es sollte nun untersucht werden, bis zu welcher Größenordnung der Störungen ein Auffinden des beschädigten Balkenelementes möglich ist. Vor der Parameteranpassung hatten die Korrekturparameter des Rechenmodells, das dem Beobachter zugrunde liegt, den Wert 1. Die Korrekturparameter wurden nach der Gleichung

$$K = K_0 + \sum_j a_j K_j$$

K_0 : nicht zu verändernde Steifigkeiten (Steifigkeiten der Federn)

K_j : Steifigkeiten der einzelnen Balkenelemente

a_j : Korrekturparameter

angesetzt.

Die Bestimmung der Korrekturparameter über eine Minimierung des Beobachtungsfehlers wurde nach dem indirekten Verfahren durchgeführt (s. Abschnitt 4.3), bei dem zuerst die Eigenfrequenzen optimiert und dann das Rechenmodell an diese Eigenfrequenzen angepaßt wird. Mit dem verbesserten Rechenmodell wird ein neuer Beobachter entworfen, mit dem dann wieder die Eigenfrequenzen optimiert werden, u.s.w..

Die Anpassung des Rechenmodells wurde durchgeführt wie in Abschnitt 3.5 beschrieben. Das verwendete Rechenprogramm ist zusätzlich noch mit einem Suchalgorithmus zum Auffinden beschädigter Bauteile versehen, der folgendermaßen funktioniert:

Zunächst wird das Bauteil in n Substrukturen unterteilt und eine Parameteranpassung an die Eigenfrequenzen des beschädigten Bauteils durchgeführt. Dann wird der kleinste Korrekturparameter gesucht und die entsprechende Substruktur wird wieder in n kleinere Substrukturen aufgeteilt, während die übrigen Substrukturen wieder die Werte des Ausgangsmodells erhalten und im weiteren Rechenlauf nicht mehr verändert werden. Mit diesem System wird wieder eine Parameteranpassung durchgeführt u.s.w., bis die Substruktur mit dem kleinsten Parameter nur noch aus einem Balkenelement besteht.

In Abschnitt 6.3.3 wird diese Vorgehensweise an mehreren Beispielrechnungen verdeutlicht. Es wird so die Meßinformation, die zur Verfügung steht, bei jedem Rechenschritt auf die Anpassung weniger Korrekturparameter konzentriert. Auch bei relativ ungenauen Meßwerten oder bei nur 2-3 gemessenen Eigenfrequenzen erhielt man noch brauchbare Ergebnisse. Diese Vorgehensweise wird bei den Laborversuchen angewendet, wenn bei größeren Änderungen der Eigenfrequenzen die Systemmatrizen und damit auch die für die Modaltransformation benötigten Eigenvektoren zu korrigieren sind oder wenn eine Schadensfrüherkennung durchgeführt werden soll.

5.2 Störung durch weißes Rauschen auf dem Meßsignal

In Tabelle 5.2 sind Ergebnisse von Simulationsrechnungen angegeben, bei denen das Meßsignal von weißem Rauschen überlagert wurde. Als Meßsignal für den Beobachter wurden die Schwingungen des 5. Freiheitsgrades verwendet (s. Bild 5.1). Das System wurde durch eine Rechteckerregung angeregt. Die für die Parameteranpassung verwendete Meßzeit beträgt 0.3 sec bei 500 Zeitschritten, das entspricht einer Abtastfrequenz von 1666.67 Hz. Als Einschwingvorgang wurden die vorhergehenden 500 Zeitschritte weggelassen. Kleine Ungereimtheiten in der Tabelle 5.2, wie die Tatsache, daß sich bei größeren Störungen bessere Ergebnisse ergeben als bei kleineren, oder daß die Ergebnisse des 2. Iterationsschritts schlechter sind als die des 1., lassen sich damit erklären, daß sich mit 500 Zeitschritten kein ideales weißes Rauschen erzeugen läßt. Da für jede Simulation und für jeden Iterationsschritt eine neue Zeitfunktion der Störung erzeugt wird, ist es möglich, daß bei gleichen stochastischen Eigenschaften eine Störfunktion günstiger für die Parameteranpassung ist als eine andere. Die Amplitude des Rauschsignals ist in Tabelle 5.2 jeweils im Verhältnis zur maximalen Amplitude des Meßsignals angegeben.

wirkliche Werte des Systems	18.6	89.0	243	486	1	0.8	1	1	1
Amplitude des Rauschens in % der Maximalampl.	Eigenfrequenzanpassung				Anpassung d. Stiefigkeitsparameter				
	1. Iteration der Parameteranpassung								
SB 0 %	18.6	89.0	244	486	1.00	0.80	1.00	1.00	1.00
SB 0.6 %	18.6	89.0	245	485	0.97	0.85	1.00	1.00	1.00
SB 3 %	18.6	89.0	250	489	0.89	1.03	1.00	1.00	1.00
SB 6 %	18.5	88.9	251	499	0.86	1.07	1.00	1.00	1.00
SB 12 %	18.3	88.8	251	489	0.83	1.07	1.00	1.00	1.00
SB 18 %	18.0	88.6	251	489	0.82	1.11	1.00	1.00	1.00
LB 0.6 %	18.6	89.0	249	492	0.91	0.98	1.00	1.00	1.00
LB 3 %	18.6	89.0	249	495	0.93	0.93	1.00	1.00	1.00
LB 6 %	18.6	89.0	250	495	0.93	0.92	1.00	1.00	1.00
LB 12 %	18.5	89.0	250	495	0.93	0.93	1.00	1.00	1.00
LB 18 %	18.5	89.0	250	495	0.90	1.05	1.00	1.00	1.00
2. Iteration der Parameteranpassung									
SB 0 %	18.6	89.0	244	486	1.00	0.80	1.00	1.00	1.00
SB 0.6 %	18.6	89.0	245	485	0.97	0.84	1.00	1.00	1.00
SB 3 %	18.5	89.0	250	489	0.86	1.04	1.00	1.00	1.00
SB 6 %	18.4	89.7	251	489	0.86	1.06	1.00	1.00	1.00
SB 12 %	18.4	89.1	250	487	0.86	1.05	1.00	1.00	1.00
SB 18 %	18.5	89.1	251	488	0.87	1.05	1.00	1.00	1.00
LB 0.6 %	18.6	89.0	246	486	0.96	0.87	1.00	1.00	1.00
LB 3 %	18.6	89.0	246	487	0.95	0.89	1.00	1.00	1.00
LB 6 %	18.6	89.0	247	487	0.92	0.93	1.00	1.00	1.00
LB 12 %	18.5	89.4	247	487	0.91	0.95	1.00	1.00	1.00
LB 18 %	18.6	89.0	250	490	0.89	1.03	1.00	1.00	1.00
LB : langsamer Beobachter - Faktor der Eigenfrequenzen von $F = 0.99$									
SB : schneller Beobachter - Faktor der Eigenfrequenzen von $F = 0.90$									

Tabelle 5.2 Anpassung der Balkenparameter bei Störung des Meßsignals

5.3 Störung des Systems durch weißes Rauschen

In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie sich Eingangsgrößen des Systems, die nicht gemessen werden können und somit auch nicht in die Zustandsschätzung des Beobachters eingehen, auf die Parameterschätzung auswirken. Die Systemgleichung erhält bei einer Störung durch weißes Rauschen die Form:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{B} u_k + \boldsymbol{\xi}_k$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C} \mathbf{x}_k$$

$\boldsymbol{\xi}_k$: weißes Rauschen - Störung des Systems

In die Zustandsschätzung geht das Störsignal $\boldsymbol{\xi}_k$ nicht ein. Die Varianz der Störung wird jeweils für die Weg- und Winkelgrößen an allen Knotenpunkten des Rechenmodells gleich groß vorgegeben (an der Einspannung des Balkens wird keine Störung aufgebracht). Die vorgegebene Varianz der Störung ist jeweils im Verhältnis zu den maximalen Auslenkungen des Balkens angegeben und zwar für den Knoten neben der Einspannung (kleinste Schwingungsamplitude) und am Balkenende (größte Schwingungsamplitude). Die Rechnungen sind jeweils mit einem schnellen und einem langsamen Beobachter durchgeführt worden. Es zeigt sich, daß auch hier der langsame Beobachter bei der Parameterschätzung auf wesentlich bessere Werte führt als der schnelle, obwohl er für die Beobachtung eines stochastisch gestörten Systems eigentlich ungünstiger ist. Weiterhin ist zu sehen, wie bei zufälligen Störungen auch zu erwarten ist, daß die Parameterschätzung um so besser wird, je mehr Meßwerte berücksichtigt werden (vgl. Parameterschätzung mit 500 und mit 2000 Zeitschritten). Die Taktfrequenz betrug 1666 Hz.

wirkliche Werte des Systems	18.6	89.0	243	486	1	0.8	1	1	1
Amplitude des Rauschens in % der Maximalampl.	Eigenfrequenzanpassung				Anpassung d. Steifigkeitsparameter				
	Nach der 2. Iteration der Parameteranpassung								
LB5 4	18.7	89.0	243	486	1.02	0.77	1.00	1.00	1.00
LB5 5	18.8	89.0	243	487	1.04	0.78	1.00	1.00	1.00
LB5 6	18.8	89.0	243	487	0.87	0.97	1.00	1.00	1.00
LB5 8	18.6	89.0	247	488	0.93	0.94	1.00	1.00	1.00
SB5 4	19.0	88.7	244	487	0.87	0.99	1.00	1.00	1.00
SB5 5	18.9	89.1	243	481	0.89	0.82	1.00	1.00	1.00
LB20 5	18.7	89.2	244	487	1.01	0.80	1.00	1.00	1.00
LB20 8	18.7	89.2	244	486	1.02	0.80	1.00	1.00	1.00
LB5 : langsamer Beobachter - Faktor der Eigenfr. von $F = 0.99$; 500 Zeitschritte									
SB5 : schneller Beobachter - Faktor der Eigenfr. von $F = 0.90$; 500 Zeitschritte									
LB20: langsamer Beobachter - Faktor der Eigenfr. von $F = 0.99$; 2000 Zeitschritte									

Tabelle 5.3 Anpassung der Balkenparameter bei Störung des Systems durch weißes Rauschen

6. Versuche mit dem Balkenversuchsstand

6.1 Allgemeines zur Versuchsdurchführung

Die Versuche mit dem Balkenversuchsstand wurden damit begonnen, daß die freien Schwingungen des einseitig eingespannten Balkens identifiziert und das Rechenmodell an die so gemessenen Eigenfrequenzen angepaßt wurde. Dann wurden Beobachter für den Balken entworfen, wobei stets "modale Beobachter" verwendet worden sind. Der Beobachterentwurf wurde entweder nach einem Verfahren durchgeführt, bei dem sich die Eigenwerte der Beobachtermatrix F vorwählen lassen (/4/), oder es wurden "optimale Beobachter" bei Störungen durch weißes Rauschen (s. Abschnitt 2.6.3) verwendet. Schon bei diesem einfachen Biegebalken sind für eine gute Modellierung viele Freiheitsgrade notwendig (z.B. führt eine Unterteilung in nur 6 Balkenelemente auf 28 Freiheitsgrade), während nur wenige Eigenschwingungen angeregt werden. Hier zeigten sich deutlich die Vorteile der modalen Beobachtung. Z.B. benötigt der Beobachter bei einer Anregung von 4 Eigenschwingungen nur 8 Freiheitsgrade. Nach dem Beobachterentwurf wurde eine Zustandsschätzung der freien Schwingungen des Balkens durchgeführt.

Anschließend wurde der Balken angesägt, um einen Schaden zu simulieren (s. Bild 6.1). Es wurde dann versucht, das beschädigte Balkenelement zum einen mit einer Parameteranpassung der Elementsteifigkeiten an direkt identifizierte Eigenfrequenzen und zum anderen mit Hilfe des Beobachters aufzufinden, wobei das direkte und das indirekte Verfahren zur Anpassung der Steifigkeitsparameter mit dem Beobachter verwendet wurden.

Nach den freien Schwingungen wurden noch erregte Schwingungen mit unterschiedlichen Typen der Erregung untersucht. Auch hier wurden mit dem Beobachter Zustands- und Parameterschätzungen durchgeführt und die Lokalisierung der Beschädigung versucht.

6.2 Aufbau und Modellierung des Balkenversuchsstandes

Die Einspannung des Balkens wurde dadurch realisiert, daß der Biegebalken zwischen zwei Metallblöcken, die fest miteinander verschraubt wurden, eingeklemmt wurde. Dieser gesamte Aufbau ist wiederum auf einer sehr schweren Eisenplatte festgeschraubt (s. Bild 6.1).

Zuerst wurden die Schwingungen mit einem Hammerschlag angeregt und an den eingezeichneten Meßstellen mit kapazitiven Wegaufnehmern (Brüel & Kjaer MM 004) gemessen. Anschließend ist eine zusätzliche Möglichkeit zur Erregung des Balkens vorgesehen (s. Bild 6.2) worden. Das Balkenende ist über eine Feder mit einem Schwingungserreger (Shaker) gekoppelt, der von einem Funktionsgenerator angesteuert wird. Es läßt sich so eine Wegerregung realisieren, deren Form vorgegeben werden kann (z.B. Sinus-, Rechteck-, Sägezahn- oder Rauscherregung). Bei diesem Aufbau mißt ein kapazitiver Wegaufnehmer die Erregung. Sie wird später als Eingangssignal des Beobachters benötigt, ein zweiter Wegaufnehmer mißt die Balkenschwingungen.

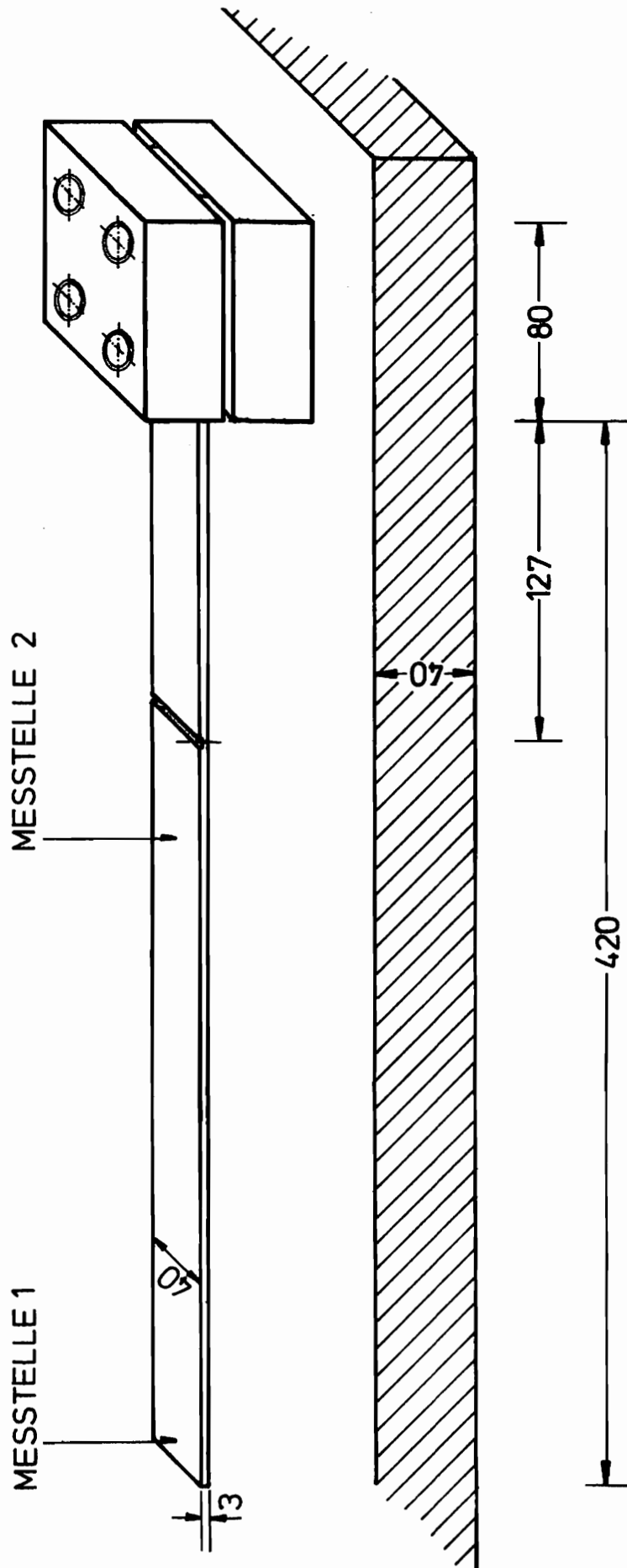


Bild 6.1 Aufbau des Balkenversuchsstandes (freie Schwingungen)

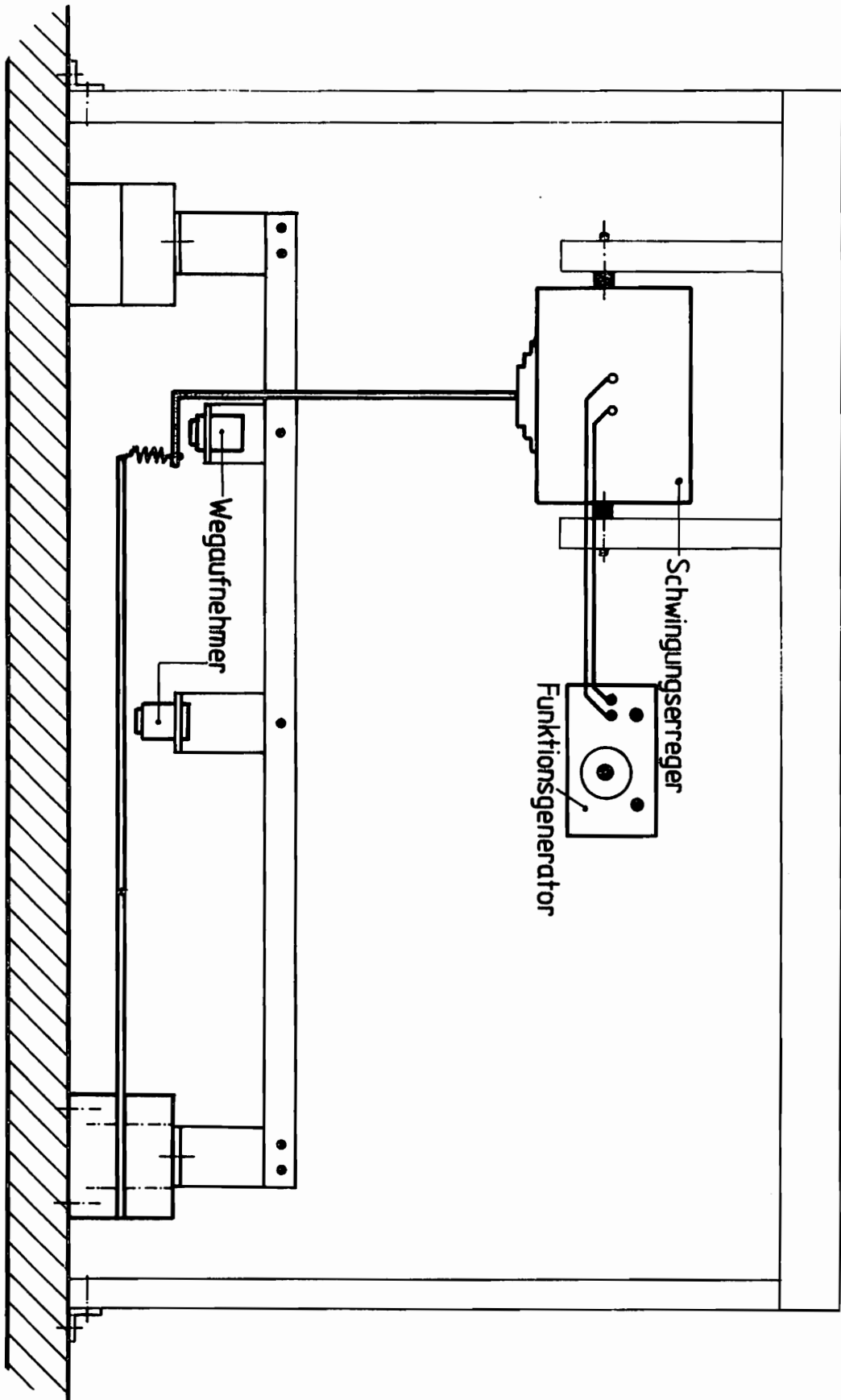


Bild 6.2 Balkenversuchsstand mit Wegerregung

Als Rechenmodell des Biegebalkens wird ein consistent-mass-modell verwendet. Die Anzahl der Balkenelemente richtet sich nach der Anzahl der in der Rechnung verwendeten Eigenschwingungen. Es ist eine Mindestanzahl von Balkenelementen notwendig, um die Eigenformen, die bei einem derartigen Rechenmodell durch die statischen Biegelinien der einzelnen Elemente angenähert werden, noch genügend genau beschreiben zu können. In der Regel benötigt man bei derartigen einfachen Systemen 2 bis 3 mal so viele Balkenelemente wie Eigenformen, bzw. Eigenfrequenzen bei der Rechnung verwendet werden sollen.

Die Einspannung des Balkens wurde zuerst als feste Einspannung modelliert. Es zeigte sich aber anhand der ersten Messungen, daß die Verformungen im Bereich der Einspannung nicht zu vernachlässigen sind. Deshalb wurden die in den Bildern 6.3 und 6.4 dargestellten Rechenmodelle verwendet, bei denen die Einspannung durch eine Feder und eine Drehfeder modelliert wurde.

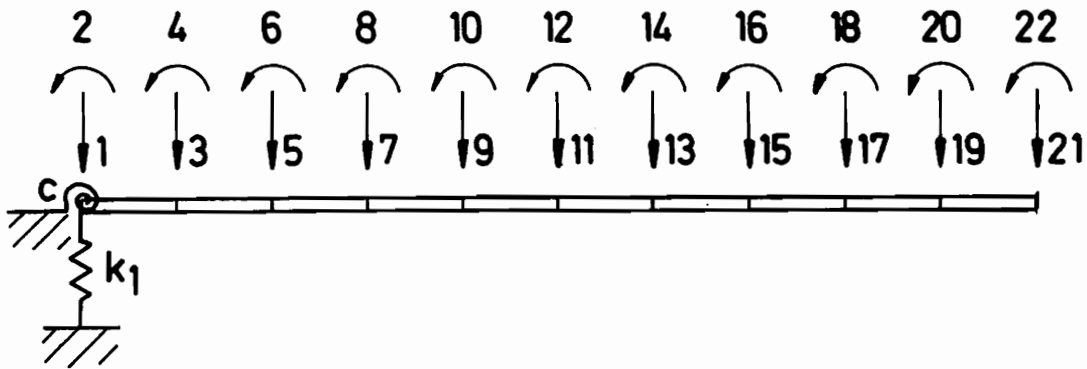


Bild 6.3 Rechenmodell des Balkenversuchsstandes (hier 10 Balkenelemente)

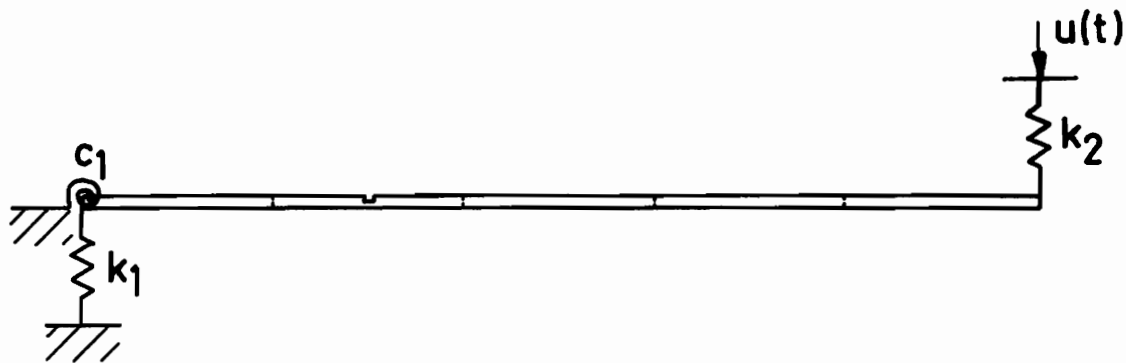


Bild 6.4 Rechenmodell des Biegebalkens mit Wegerregung (hier 5 Balkenelemente)

6.3 Anpassung des Rechenmodells an direkt gemessene Eigenfrequenzen

6.3.1 Allgemeines zur Messung und Anpassung der Eigenfrequenzen

Voraussetzung für einen guten Beobachter und für eine Schadenserkennung mit Hilfe eines Beobachters ist ein genaues Rechenmodell der betrachteten Struktur. Besonders für einen "modalen Beobachter" ist eine gute Übereinstimmung der Eigenfrequenzen von Modell und Wirklichkeit wichtig. Bei der nachfolgend beschriebenen Anpassung des Rechenmodells an gemessene Eigenfrequenzen wird jede Elementsteifigkeit eines Balkenelements mit einem Korrekturfaktor a_j versehen. Zusätzlich wurden noch die Federsteifigkeiten der Einspannung und der Wegerregung mit je einem Korrekturparameter versehen. Bei den zuerst betrachteten freien Schwingungen ist die Federsteifigkeit der Wegerregung zu Null gesetzt worden. Bei dem aus Vorabkenntnissen gewonnenen Rechenmodell des Balkens haben alle Korrekturparameter den Wert 1. Der Fehlervektor ist um die Abweichung der Korrekturparameter des angepaßten Rechenmodells von denen des Ausgangsmodells erweitert worden.

$$\mathbf{v}^T = | \hat{\omega}_1 - \omega_1, \dots, \hat{\omega}_M - \omega_M, \hat{a}_1 - a_1, \dots, \hat{a}_{N+3} - a_{N+3} |$$

M : Anzahl der gemessenen Eigenfrequenzen

N : Anzahl der Balkenelemente

Der Optimierungsalgorithmus zur Minimierung des Fehlervektors bleibt durch diese Erweiterung auch dann stabil, wenn mehr Korrekturparameter angepaßt werden, als gemessene Eigenfrequenzen zur Verfügung stehen (s. Abschnitt 3.5). Die Wichtung der Eigenfrequenzabweichungen ist in allen Rechenläufen so gewählt worden, daß prozentual gleiche Fehler der Eigenfrequenzen gleiche Anteile am Fehlerfunktional haben, d.h., in der Wichtungsmatrix stehen Werte, die proportional zu $1/\omega_i^2$ sind.

Zunächst wurden die Eigenfrequenzen und Dämpfungen mit dem im Anhang A1 beschriebenen Verfahren zur direkten Identifikation modaler Schwingungsparameter (Frequenz, Dämpfung, Phase, Amplitude) aus der Messung freier Schwingungen bestimmt. Es wurden mehrere Ausschwingversuche durchgeführt, bei denen die Schwingungen durch Hammerschläge angeregt wurden. Nach einer Mittelung über die Ergebnisse ergaben sich für den unbeschädigten Balken, die in Tabelle 6.1 aufgeführten Werte

	Eigenwert Nr.				
	1	2	3	4	5
Eigenfrequenz [Hz]	14.2	89.0	249.0	487.9	806.3
Dämpfung [1/sec]	0.06	0.20	0.45	1.00	1.50

Tabelle 6.1 Direkt gemessene Eigenfrequenzen des unbeschädigten Balkens

Für den angesägten Balken wurden die in Tabelle 6.2 aufgeführten Werte gemessen.

	Eigenwert Nr.				
	1	2	3	4	5
Eigenfrequenz [Hz]	13.97	88.6	245.0	485.7	804.0
Dämpfung [1/sec]	0.06	0.40	0.90	1.40	2.00

Tabelle 6.2 Direkt gemessene Eigenfrequenzen des angesägten Balkens

Die rechnerische Bestimmung der Eigenfrequenzen ist mit unterschiedlich feinen Diskretisierungen des Rechenmodells für den Balken durchgeführt worden, um herauszufinden, wieviele Elemente mindestens für eine sinnvolle Modellierung erforderlich sind. Da der Beobachter in Echtzeit arbeitet, ist man bestrebt, ein möglichst kleines Rechenmodell zu verwenden. Zum anderen wird an der Tabelle 6.3 die eigentlich allgemein bekannte, aber doch häufig nicht beachtete Tatsache sehr deutlich, daß eine Parameteranpassung keine sinnvollen Ergebnisse liefern kann, wenn die Struktur des Rechenmodells nicht stimmt. Das bedeutet hier, daß nicht mehr Eigenfrequenzen zur Anpassung herangezogen werden sollen, als bei der verwendeten Elementanzahl mit genügender Genauigkeit zu modellieren sind.

Anzahl der Balkenelemente	Eigenfrequenz [Hz] Nr.				
	1	2	3	4	5
5	14.2	89.3	251	494	820
6	14.2	89.2	250	492	818
7	14.2	89.2	250	490	814
10	14.2	89.2	250	490	808
12	14.2	89.2	250	489	807

Federsteifigkeiten der Einspannung : $k_1=1 \cdot 10^7$ N/m, $c_1=3000$ Nm

Tabelle 6.3 Berechnung der Eigenfrequenzen des Balkens mit unterschiedlichen Element-einteilungen

Weiterhin wurde untersucht, ob eine Beschädigung des Balkens und die damit verbundene Verringerung der Steifigkeit alleine mit Hilfe von gemessenen Eigenfrequenzen aufgefunden und lokalisiert werden kann. Der Balken wurde an der in Bild 6.1 gekennzeichneten Stelle angesägt. Anschließend wurden die Eigenfrequenzen des Rechenmodells an diese Werte angepaßt. Die Federsteifigkeiten der Einspannung des Balkens wurden hierbei als relativ genau angenommen und fast nicht mehr verändert, da sie ja schon bei der Anpassung des unbeschädigten Balkens optimiert worden sind. Eine größere Ab-

weichung der Federsteifigkeiten von den Ausgangswerten läßt sich mit einer entsprechend großen Wichtung des Fehlers, der durch die Abweichung der entsprechenden Parameter von den Ausgangswerten verursacht wird (s. Gl.6.1), verhindern. Um die Beschädigung zu lokalisieren, muß bei der Anpassung der Steifigkeitsmatrix an die gemessenen Eigenfrequenzen genau der Korrekturparameter des angesägten Balkenelementes kleiner werden.

Bei dem 1. Programm werden die Elementsteifigkeitsmatrix eines Balkenelements und die Federsteifigkeiten mit je einem Korrekturparameter versehen. Man erhält so wesentlich mehr Korrekturparameter als gemessene Eigenfrequenzen zur Verfügung stehen. Numerisch ist dies Verfahren trotzdem stabil, da die Abweichungen der Parameter des angepaßten Rechenmodells von denen des Ausgangsmodells in den Fehlervektor aufgenommen werden.

Das zweite Programm bietet die Möglichkeit, mehrere Balkenelemente zu größeren Substrukturen zusammenzufassen und mit einem Korrekturparameter zu versehen. Es ist zusätzlich, wie in Abschnitt 5.1 beschrieben, mit einem Suchalgorithmus zum Auffinden eines beschädigten Bauteils versehen.

6.3.2. Anpassung jedes einzelnen Balkenelementes

Die Elementmatrizen für einen einfachen Biegebalken sind relativ genau. Deshalb wurden bei der Anpassung des unbeschädigten Balkens an die gemessenen Eigenfrequenzen vorwiegend die Federsteifigkeiten der Einspannung korrigiert. Eine größere Änderung der Korrekturparameter der Elementsteifigkeiten wurde über eine entsprechende Wahl der Wichtungsmatrix verhindert. Es wurden bei jedem Rechenlauf drei Iterationsschritte durchgeführt.

Die Ergebnisse in Tabelle 6.4 zeigen, daß, obwohl sich fast ausschließlich die Federsteifigkeiten verändert haben, die Abweichungen zwischen gemessenen und berechneten Eigenfrequenzen fast vollständig verschwinden, wenn das Rechenmodell eine ausreichende Anzahl von Balkenelementen enthält. Eine Abschätzung der notwendigen Anzahl ist mit Tabelle 6.3 vorzunehmen. An den relativ hohen Frequenzfehlern und den im Vergleich zu den anderen Rechnungen großen Abweichungen der Balkensteifigkeiten von den Ausgangswerten ist zu sehen, daß eine Modellierung mit 5 Balkenelementen für eine Anpassung an 4 oder 5 Eigenfrequenzen viel zu wenig ist.

Die restlichen Ergebnisse zeigen eine gute Übereinstimmung. Die Balkensteifigkeiten verändern sich kaum und die Federsteifigkeiten der Einspannung betragen $k_1 = 1 \cdot 10^7$ N/m, $c_1 = 2550$ Nm.



	nach Anpassung		Korrekturparameter											Fehler durch Frequenzabweich.			
	$k_i [N/n]$	$c_i [Nm]$	der Steifigkeiten der einzelnen Balkenelemente														
Anpassung an 4 Eigenfr.	$2.2 \cdot 10^6$	2700	0.995			1.000			1.001			1.007			1.009		2.8
	$6.7 \cdot 10^6$	2530	1.002		0.996		1.001		0.999		1.002		0.994		0.999		$1.2 \cdot 10^{-4}$
	$9.8 \cdot 10^6$	2540	1.000	1.000	0.999	0.999	1.001	0.001	0.998	0.998	1.000	1.000			$3 \cdot 10^{-5}$		
	$1.0 \cdot 10^7$	2560	0.999	1.001	1.001	0.998	0.999	1.002	1.002	0.998	0.998	0.999	1.001	1.000	$7 \cdot 10^{-5}$		
Anpassung an 5 Eigenfr.	$3.4 \cdot 10^6$	1900	1.014			1.013			1.013			1.021			0.941		85
	$4.4 \cdot 10^6$	2700	0.995		1.000		0.997		1.002		0.999		1.005		0.999		$1.0 \cdot 10^{-4}$
	$9.8 \cdot 10^6$	2540	1.000	1.001	0.999	0.997	1.001	1.001	0.998		0.998	1.000	1.001			$3 \cdot 10^{-5}$	
	$1.1 \cdot 10^7$	2540	0.998	1.002	1.000	0.997	1.001	1.001	1.001	1.000	0.995	0.999	1.002	1.000	$1 \cdot 10^{-5}$		
	Wichtung der Parameterabw.: 1		Wichtung der Parameterabweichung : 1000														

Tabelle 6.4 Anpassung der Eigenfrequenzen des Rechenmodells des unbeschädigten Balkens an gemessene Eigenfrequenzen

Anschließend wurde der angesägte Balken untersucht. Da sich durch eine Beschädigung des Balkens die Federsteifigkeiten der Einspannung nicht verändern, wurde mit der Wichtungsmatrix verhindert, daß sich diese Werte allzu stark ändern. Aus den Ergebnissen in Tabelle 6.5 läßt sich ersehen, daß sich in allen Rechnungen die Beschädigung lokalisieren läßt, wobei den Rechnungen mit 7 und 10 Elementen das größte Vertrauen zu schenken ist, da hier die Parameteranzahl nicht zu groß ist, trotzdem aber die verwendeten Eigenfrequenzen und vor allem die zugehörigen Eigenformen gut wiedergegeben werden können.



	nach Anpassung		Korrekturparameter											Fehler durch Frequenzabweich.			
	$k_i [N/n]$	$c_i [Nm]$	der Steifigkeiten der einzelnen Balkenelemente														
Anpassung an 4 Eigenfr.	$1.0 \cdot 10^7$	2500	1.011			0.873			1.010			1.005			0.921		0.8
	$1.0 \cdot 10^7$	2500	0.980		0.936		0.917		1.051		0.964		0.990		1.004		0.2
	$1.0 \cdot 10^7$	2500	0.956	0.979	0.943	0.951	1.046	1.043	0.958	0.967	1.003	1.004			$1 \cdot 10^{-5}$		
	$1.0 \cdot 10^7$	2500	0.953	0.977	0.967	0.930	0.975	1.051	1.048	0.977	0.952	0.991	1.005	1.001	$1 \cdot 10^{-5}$		
Anpassung an 5 Eigenfr.	$1.0 \cdot 10^7$	2500	1.226			0.679			0.897			1.107			1.064		0.04
	$1.0 \cdot 10^7$	2500	0.957		0.944		1.007		1.066		0.945		0.952		1.064		0.02
	$1.0 \cdot 10^7$	2500	0.968	1.044	0.852	0.943	1.022	1.024	0.967	1.015	1.018	1.020			80		
	$1.0 \cdot 10^7$	2500	0.939	0.992	0.969	0.922	1.001	1.041	1.044	0.996	0.933	0.998	1.007	1.003	$1 \cdot 10^{-4}$		
	Wichtung der Parameterabw.: 1000		Wichtung der Parameterabweichung : 1														

Tabelle 6.5 Anpassung der Eigenfrequenzen des Rechenmodells des angesägten Balkens an gemessene Eigenfrequenzen

6.3.3 Anpassung größerer Substrukturen an die gemessenen Eigenfrequenzen

Die in diesem Abschnitt beschriebene Anpassung von Korrekturparametern der Steifigkeitsmatrix an direkt gemessene Eigenfrequenzen wurde mit einem Programm durchgeführt, das die Möglichkeit bietet, mehrere Elementsteifigkeiten zu einer Substruktur zusammenzufassen und mit einem Korrekturparameter zu versehen, um so die Anzahl dieser Parameter erheblich zu reduzieren. Zusätzlich ist das Programm, wie schon in Abschnitt 5.1 beschrieben, mit einem Suchalgorithmus ausgestattet, mit dem im Sinne einer Schadenserkennung Balkenelemente mit verringerter Steifigkeit aufgefunden werden können. Da dieses Programm auch eine Schadenserkennung ermöglicht, wenn nur wenig Meßinformation vorhanden ist, wurde es bei der später beschriebenen indirekten Anpassung der Steifigkeitsmatrix durch eine Minimierung des Beobachtungsfehlers vorwiegend verwendet.

In den Tabellen 6.7 bis 6.13 sind einige Beispielrechnungen aufgeführt. Sie wurden einerseits durchgeführt, um die Leistungsfähigkeit dieses Programms zu testen, andererseits um zu untersuchen, wieviele Eigenfrequenzen zur Lokalisierung der Beschädigung wenigstens notwendig sind. Es wurde bei allen diesen Rechnungen von dem verbesserten Balkenmodell ausgegangen und an die in Tabelle 6.2 aufgeführten, gemessenen Eigenfrequenzen angepaßt. Die Federsteifigkeiten wurden nicht mehr verändert. Die mit "-" bezeichneten Balkenstücke wurden nicht angepaßt.

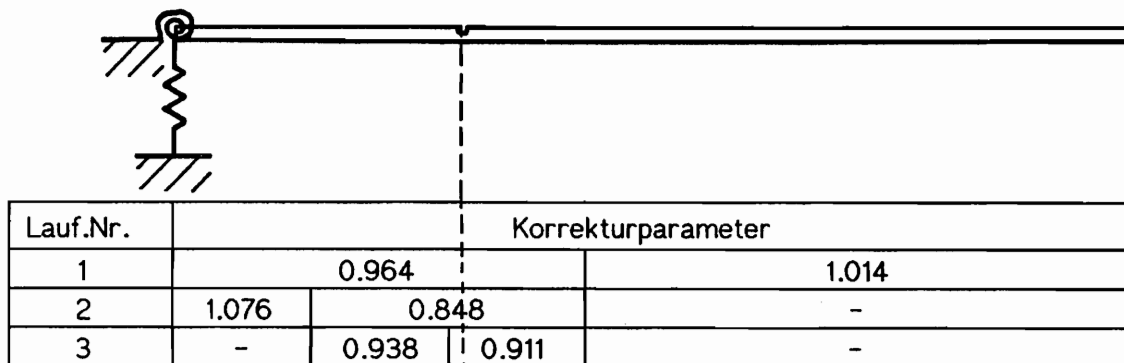


Tabelle 6.7 Anpassung von 7 Balkenelementen an 2 Eigenfrequenzen

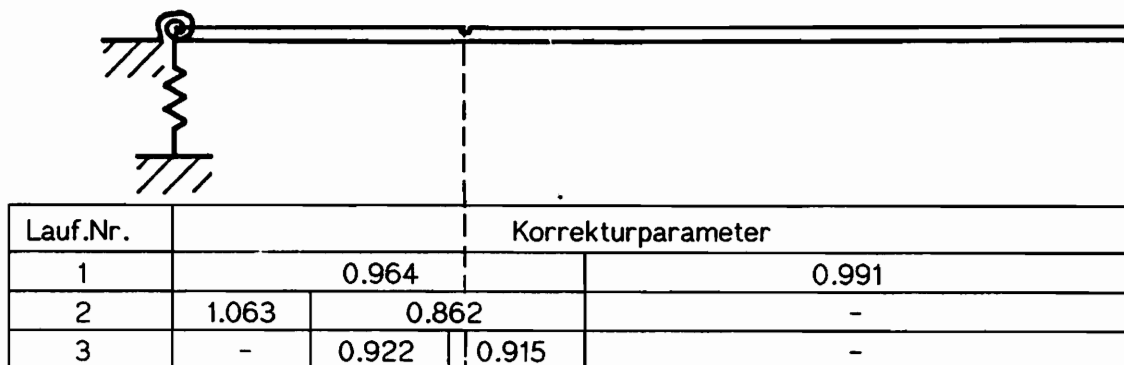
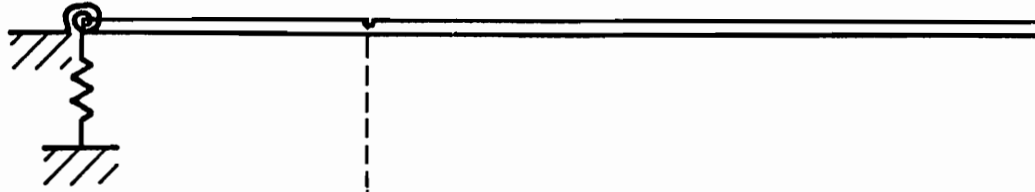
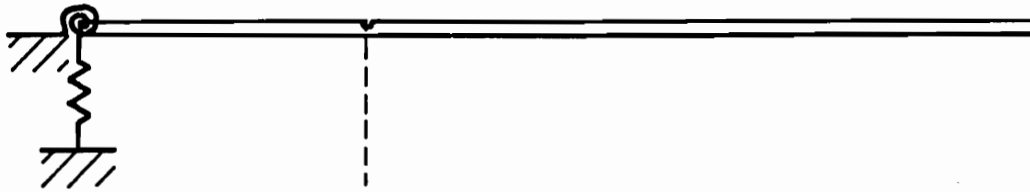


Tabelle 6.8 Anpassung von 7 Balkenelementen an 3 Eigenfrequenzen



Lauf.Nr.	Korrekturparameter		
1	0.970		0.987
2	0.995	0.928	-
3	-	0.810	0.986

Tabelle 6.9 Anpassung von 7 Balkenelementen an 4 Eigenfrequenzen



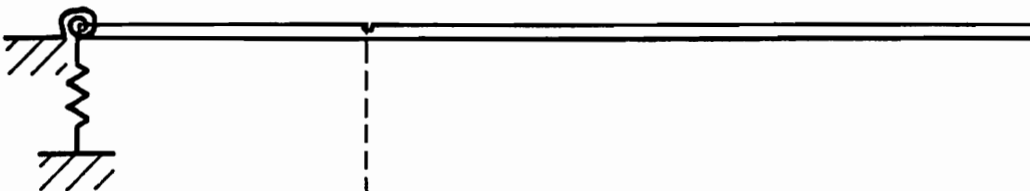
Lauf.Nr.	Korrekturparameter		
1	0.965		1.029
2	0.921	1.046	-
3	0.987	0.892	-

Tabelle 6.10 Anpassung von 10 Balkenelementen an 2 Eigenfrequenzen



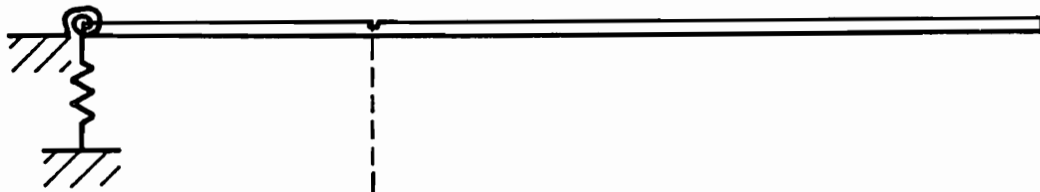
Lauf.Nr.	Korrekturparameter		
1	0.970		0.987
2	0.995	0.928	-
3	-	0.810	0.986

Tabelle 6.11 Anpassung von 10 Balkenelementen an 3 Eigenfrequenzen



Lauf.Nr.	Korrekturparameter		
1	0.969		1.029
2	0.981	0.952	-
3	-	0.842	0.988

Tabelle 6.12 Anpassung von 10 Balkenelementen an 4 Eigenfrequenzen



Lauf.Nr.	Korrekturparameter		
1	0.967		1.003
2	0.974	0.962	-
3	-	0.844	0.985

Tabelle 6.13 Anpassung von 10 Balkenelementen an 5 Eigenfrequenzen

6.4 Beobachterentwurf für den einseitig eingespannten Balken

Ausgehend von den in Tabelle 6.4 aufgeführten Steifigkeitsparametern wurde ein Rechenmodell erstellt, und damit wurden dann Beobachter für den Balken entworfen. Es wurde einmal das Verfahren verwendet, bei dem die Eigenwerte der Beobachtermatrix F (charakteristisch für das Abklingen des Fehlers) vorgewählt werden können, zum anderen der in Abschnitt 2.6.3 beschriebene "optimale Beobachter" bei Störungen durch weißes Rauschen. Der Beobachter mit vorwählbaren Eigenwerten ergab bei den freien Schwingungen die besseren Ergebnisse, da sich die Dynamik, mit der der Beobachter auf Störungen reagiert, mit diesem Beobachter direkt festlegen läßt. Bei den erregten Schwingungen war der "optimale Beobachter" günstiger, da man so beim Beobachterentwurf berücksichtigen kann, an welcher Stelle (bei welchem Freiheitsgrad) Störungen, d.h. unbekannte Eingänge und Meßrauschen, zu erwarten sind. Bei den Balkenversuchen mit Erregung waren das die Einspannung und die Stelle, an der die Erregungskraft eingeleitet wurde.

In Bild 6.5 ist die Beobachtung von freien Schwingungen des Balkens dargestellt. Der Faktor der Eigenwerte der F -Matrix für das zeitdiskrete System betrug 0.96. Es wurden 6 Balkenelemente verwendet. An dem Bild ist gut der Einschwingvorgang zu erkennen. Da die Anfangswerte der Zustandsschätzung nicht bestimmt werden konnten, benötigt der Beobachter eine gewisse Zeit, um sich, ausgehend von den falschen Anfangswerten, mit dem System zu synchronisieren. Die Möglichkeit, trotz unbekannter Anfangswerte eine gute Zustandsschätzung zu erhalten, ist ein großer Vorteil des Beobachters gegenüber anderen Simulationsrechnungen.

durchgezogen : Beobachter
gestrichelt (lange Striche) : Messwert

Anzahl der Zeitschritte : 512
Meßzeit : 0.25 sec

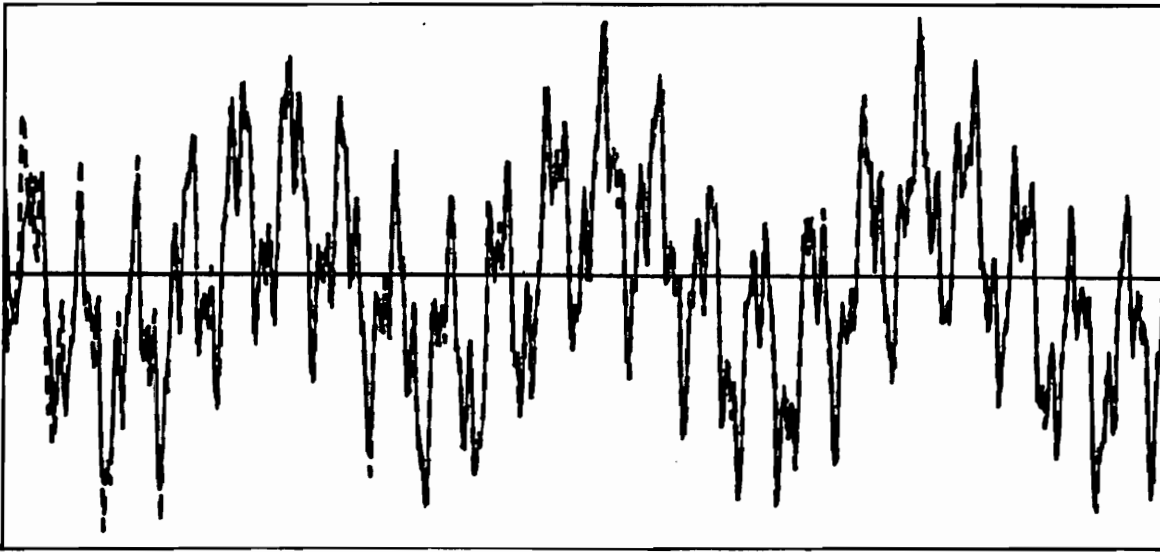


Bild 6.5 Beobachter für freie Schwingungen des unbeschädigten Balkens (mit Einschwingvorgang)

In Bild 6.6 ist die entsprechende Zustandsschätzung für eine erregte Balkenschwingung dargestellt. Der Beobachter wurde hier als "optimaler Beobachter" entworfen.

durchgezogen : Beobachter
gestrichelt (lange Striche) : Messwert

Anzahl der Zeitschritte : 512
Meßzeit : 0.25 sec

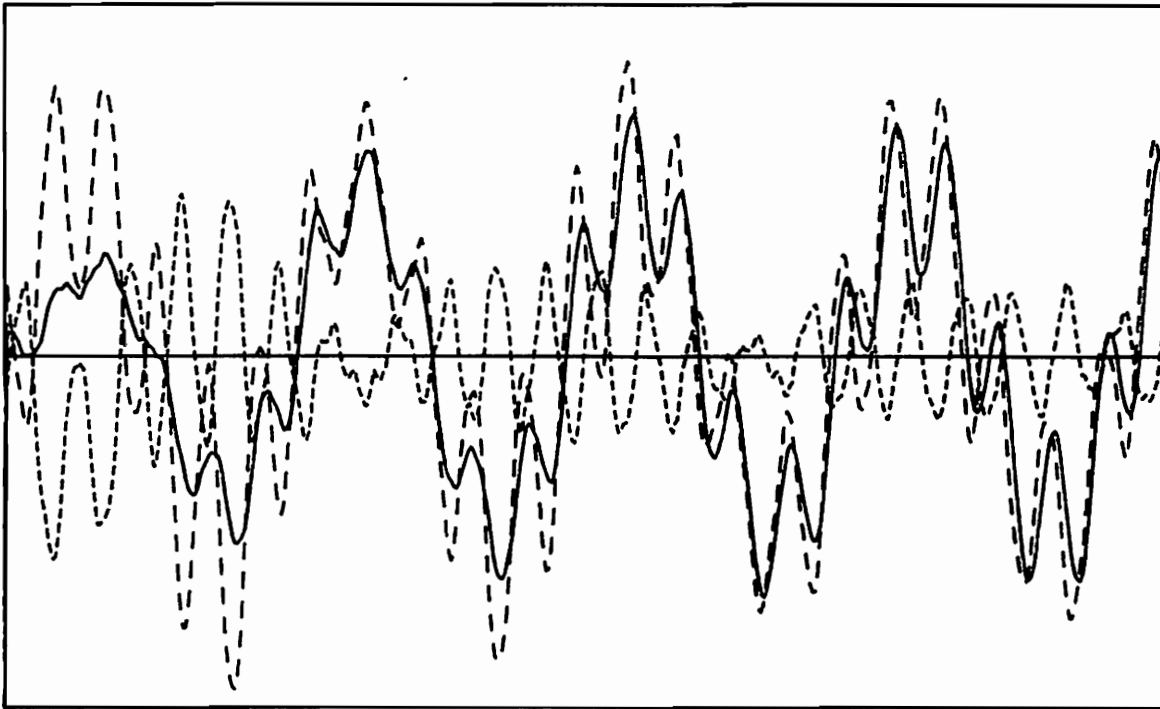


Bild 6.6 Beobachter für erregte Schwingungen des unbeschädigten Balkens (Einschwingvorgang)

In allen hier beschriebenen Zustandsschätzungen wurde mit "modalen Beobachtern" gerechnet, wobei der Entwurf des "modalen Beobachters" mit einer unterschiedlichen Anzahl von Freiheitsgraden durchgeführt wurde. Es wurden nach der Modaltransformation 1, 2, 3, 4 und 5 Eigenschwingungen berücksichtigt (s.Bilder 6.7 bis 6.11). Es zeigte sich, daß schon mit 3 Eigenschwingungen, d.h. mit 6 Beobachterfreiheitsgraden, gute Ergebnisse zu erzielen sind.

durchgezogen : Beobachter
gestrichelt (lange Striche) : Messwert

Anzahl der Zeitschritte : 512
Meßzeit : 0.25 sec

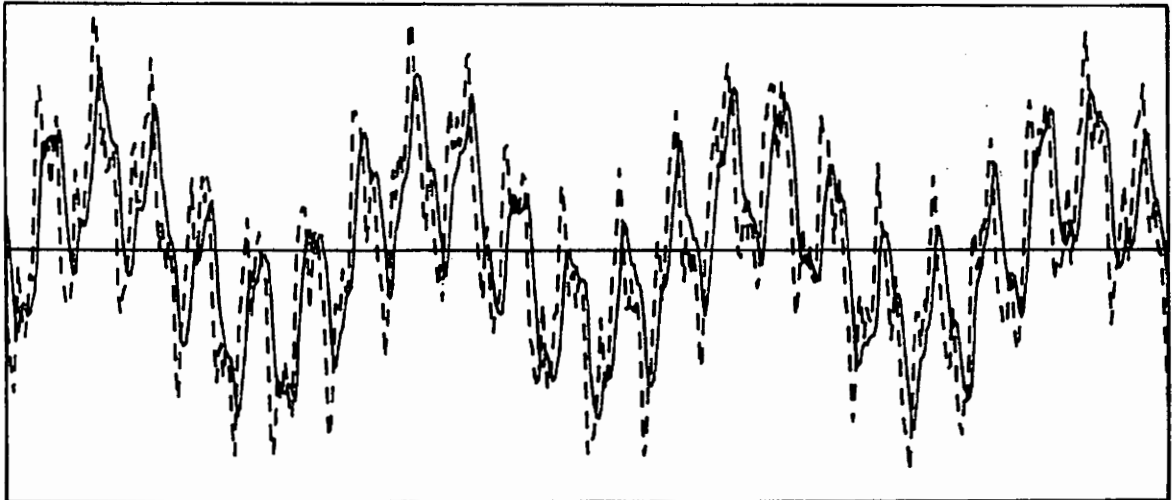


Bild 6.7 "Modaler Beobachter" für freie Balkenschwingungen : **1 Eigenschwingung**

durchgezogen : Beobachter
gestrichelt (lange Striche) : Messwert
gestrichelt (kurze Striche) : Beobachterfehler

Anzahl der Zeitschritte : 512
Meßzeit : 0.25 sec

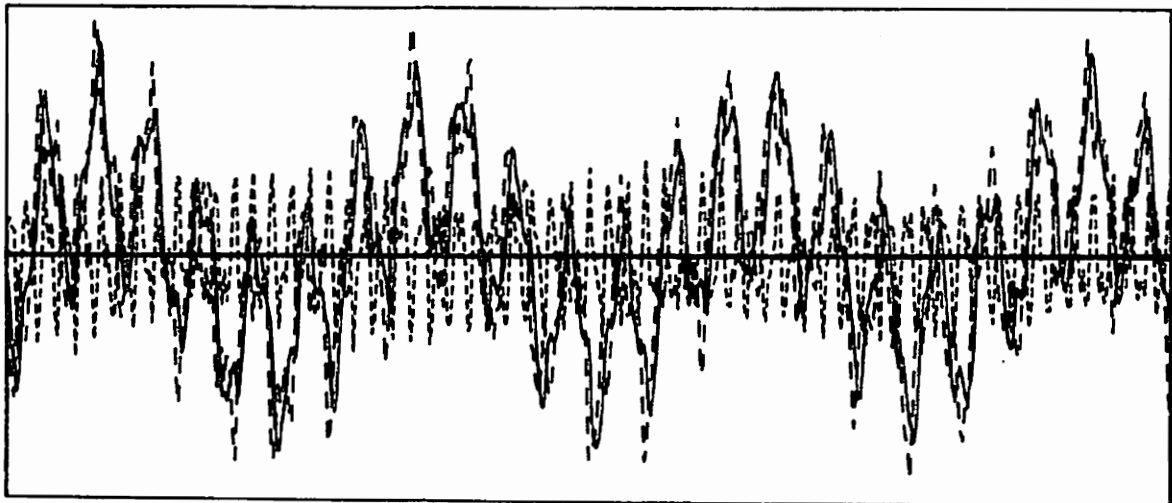


Bild 6.8 "Modaler Beobachter" für freie Balkenschwingungen : **2 Eigenschwingungen**

durchgezogen : Beobachter
gestrichelt (lange Striche) : Messwert
gestrichelt (kurze Striche): Beobachterfehler

Anzahl der Zeitschritte : 512
Meßzeit : 0.25 sec

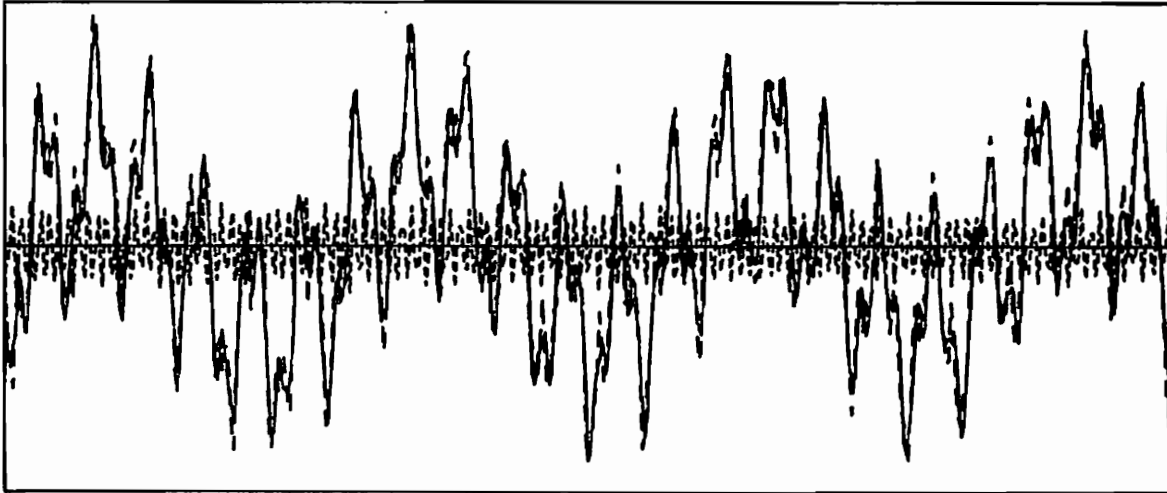


Bild 6.9 "Modaler Beobachter" für freie Balkenschwingungen : **3** Eigenschwingungen

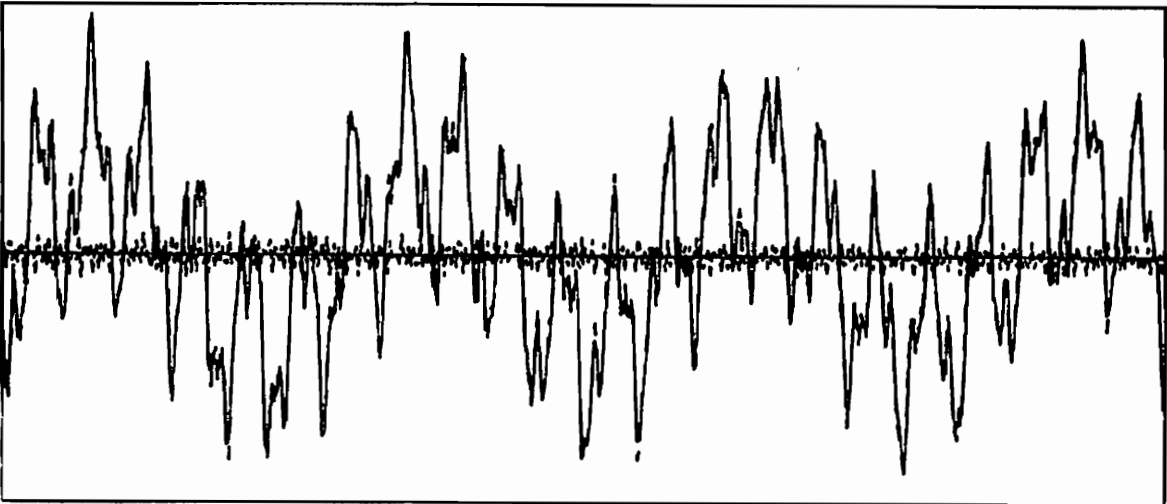


Bild 6.10 "Modaler Beobachter" für freie Balkenschwingungen : **4** Eigenschwingungen

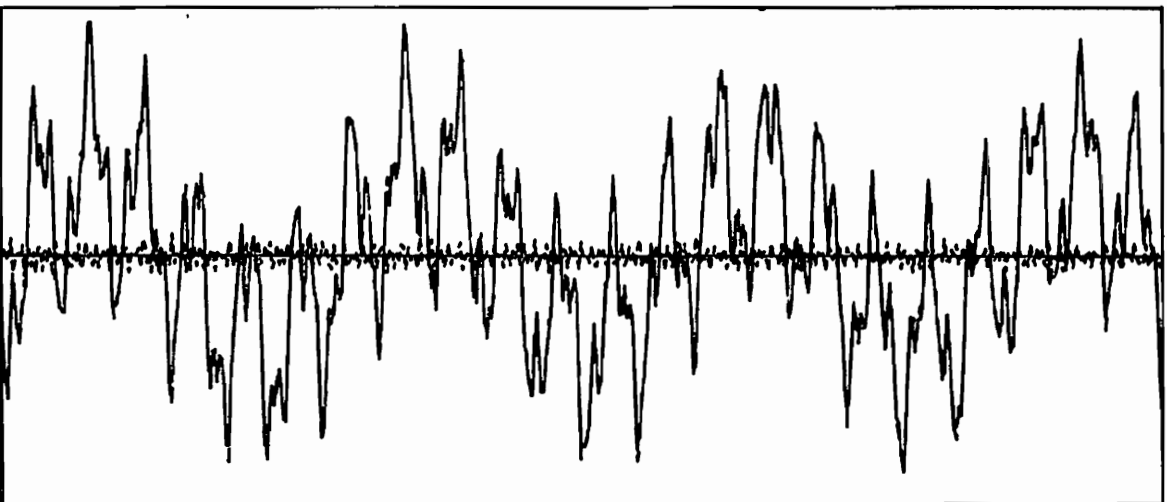


Bild 6.11 "Modaler Beobachter" für freie Balkenschwingungen : **5** Eigenschwingungen

6.5 Lokalisierung einer Beschädigung des Balkens mit Hilfe eines Beobachters für freie Balkenschwingungen

6.5.1 Indirekte Anpassung der Korrekturparameter der Steifigkeitsmatrix

Zunächst wurden über eine Minimierung des Beobachtungsfehlers die Eigenfrequenzen des Rechenmodells und damit die Systemmatrix des modal transformierten Systems optimal an die gemessenen Balkenschwingungen angepaßt. In einem anschließenden Rechengang wurde das Rechenmodell dahingehend korrigiert, daß seine Eigenfrequenzen mit den angepaßten übereinstimmten. Auf diese Weise konnte eine Schadenserkennung durchgeführt und die für die Modaltransformation benötigten Eigenformen verbessert werden. In Tabelle 6.14 ist die Anregung der einzelnen Eigenschwingungen des unbeschädigten Balkens an der Meßstelle beispielhaft für einen der aufgenommenen Datensätze aufgeführt. Die Amplituden sind mit dem Programm zur direkten Identifikation bestimmt worden.

Eigenschwingung Nr.	1	2	3	4	5
Frequenz	14.2	89.0	249.0	487.1	806.4
Amplitude [mV]	1450	1700	1000	650	330

Tabelle 6.14 Anregungen der einzelnen Eigenfrequenzen des unbeschädigten Balkens

Die Beobachter für die Zustandsschätzung der freien Schwingungen des angesägten Balkens wurden mit dem Rechenmodell des unbeschädigten Balkens entworfen. Die Anregung der einzelnen Eigenschwingungen ist beispielhaft für eine Messung in Tabelle 6.14 angegeben.

Eigenschwingung Nr.	1	2	3	4	5
Frequenz	13.9	87.8	242	484	802
Amplitude [mV]	2700	2800	1050	570	200

Tabelle 6.15 Anregungen der einzelnen Eigenfrequenzen des angesägten Balkens

In dem ersten Rechenlauf wurde der Beobachter ähnlich einem Kalman-Filter entworfen. Es wurden die Erwartungswerte der Systemstörungen für das modal transformierte System vorgegeben. Sie wurden für alle Eigenschwingungen gleich 1 gesetzt, das bedeutet ca. 10 % der maximalen Anregung der 4. Eigenfrequenz und ca. 1 % der maximalen Anregung der 1. Eigenfrequenz. Der Erwartungswert des Meßsignals wurde ebenfalls gleich 1 gesetzt, das entspricht einer Meßstörung von 100 mV bei einem Maximalauschlag der Meßgeräte von 10 000 mV. Wie an Bild 6.12 zu erkennen ist, erhielt man mit diesen Werten einen guten Beobachter.

Da es problematisch ist, die Varianzen der System- und Meßstörungen zu bestimmen, wurde auch ein Beobachter eingesetzt, bei dem die Eigenwerte der Beobachtermatrix und somit die Dynamik des Beobachters direkt vorgegeben werden konnten. Die Eigenwerte der Beobachtermatrix des zeitdiskreten Rechenmodells wurden als Vielfache der System-eigenwerte vorgegeben. Damit der Beobachter stabil bleibt, müssen dessen Eigenwerte vom Betrag her kleiner sein als die des Systems. Es wurde mit "modalen Beobachtern" gearbeitet, die 4 Eigenschwingungen berücksichtigen. Der Balken wurde mit 6 Elementen diskretisiert.

Die Anpassung der Eigenfrequenzen des Rechenmodells ergab eine gute Übereinstimmung mit den direkt identifizierten Eigenfrequenzen (vgl. mit Tabelle 6.15), und eine Erkennung des Schadens war ebenfalls möglich (der Korrekturparameter des 2. Elements erhielt den kleinsten Wert). Nach der 1. Anpassung der Eigenfrequenz ist eine deutliche Verringerung des Beobachtungsfehlers zu erkennen. Die Anpassung des Rechenmodells an die angepaßten Eigenfrequenzen und die damit verbundene Verbesserung der Eigenformen ergab keine sichtbare Verringerung des Beobachtungsfehlers mehr (s. Bild 6.15 und 6.16).

1. Anpassung der Eigenfrequenzen				
Iterations- schritt	Eigenfrequenz Nr.			
	1	2	3	4
0	14.20	89.0	249	490
1	13.89	88.4	242	484
2	13.89	88.3	242	484
1. Anpassung der Steifigkeitsmatrix an die verbesserten Eigenfrequenzen				
Lauf.Nr.	Korrekturparameter			
1	0.962		0.976	
2	1.043	0.879		-
3	-	0.843	0.974	-
2. Anpassung der Eigenfrequenzen				
Iterations- schritt	Eigenfrequenz Nr.			
	1	2	3	4
0	13.80	88.4	245	482
1	13.89	88.4	242	484
2	13.89	88.4	242	484
1. Anpassung der Steifigkeitsmatrix an die verbesserten Eigenfrequenzen				
Lauf.Nr.	Korrekturparameter			
1	0.962		0.976	
2	1.044	0.879		-
3	-	0.841	0.976	-

Tabelle 6.16 Indirekte Anpassung der Steifigkeitsmatrix über die Minimierung des Beobachtungsfehlers

durchgezogen : Beobachter
gestrichelt (lange Striche) : Messwert
gestrichelt (kurze Striche) : Beobachterfehler

Anzahl der Zeitschritte : 512
Meßzeit : 0.25 sec

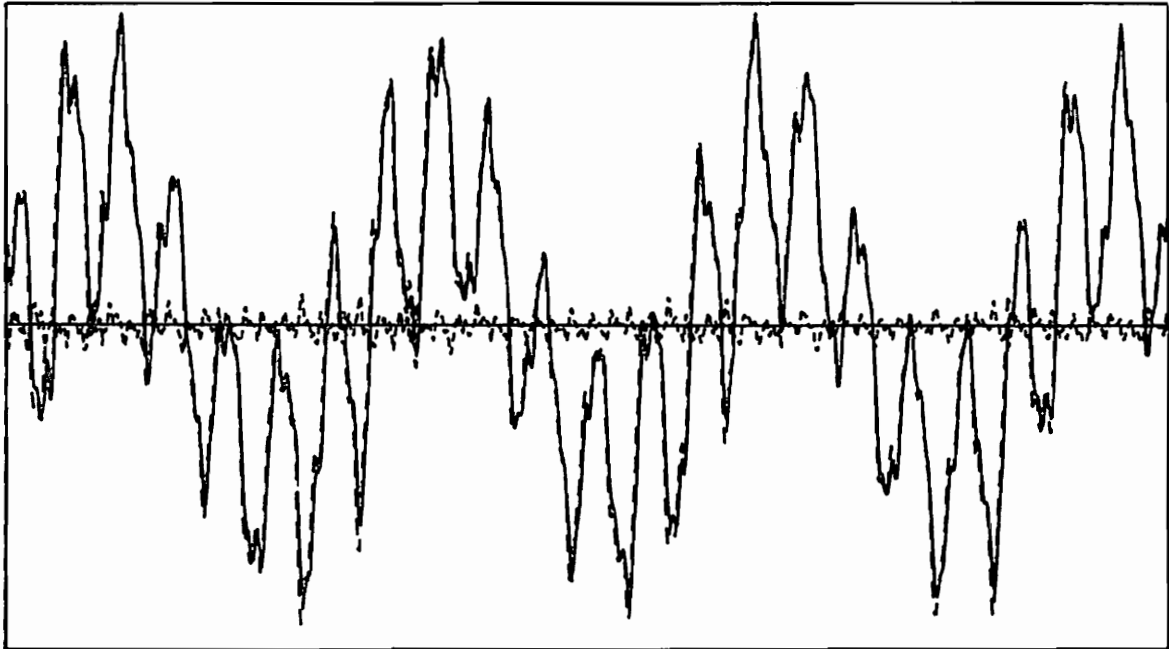


Bild 6.12 Beobachter für den Balken vor der Parameteranpassung ("optimaler Beobachter")

durchgezogen : Beobachter
gestrichelt (lange Striche) : Messwert
gestrichelt (kurze Striche) : Beobachterfehler

Anzahl der Zeitschritte : 512
Meßzeit : 0.25 sec

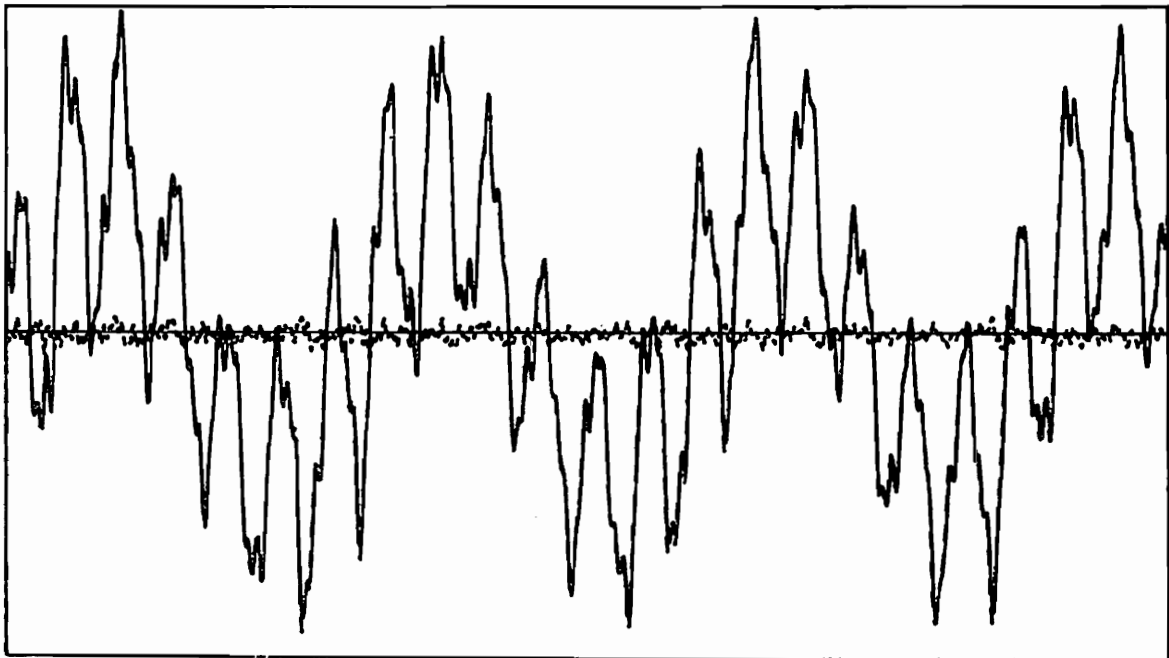


Bild 6.13 Beobachter für den Balken nach Anpassung der Steifigkeitsmatrix ("optimaler Beobachter")

1. Anpassung der Eigenfrequenzen				
Iterations- schritt	Eigenfrequenz Nr.			
	1	2	3	4
0	14.20	89.0	249	490
1	13.85	88.3	242	484
2	13.89	88.3	242	484
1. Anpassung der Steifigkeitsmatrix an die verbesserten Eigenfrequenzen				
Lauf.Nr.	Korrekturparameter			
1	0.955		0.990	
2	1.020	0.894		-
3	-	0.840	0.973	-
2. Anpassung der Eigenfrequenzen				
Iterations- schritt	Eigenfrequenz Nr.			
	1	2	3	4
0	13.81	88.4	245	482
1	13.86	88.3	242	484
2	13.86	88.3	242	484
1. Anpassung der Steifigkeitsmatrix an die verbesserten Eigenfrequenzen				
Lauf.Nr.	Korrekturparameter			
1	0.956		0.985	
2	1.019	0.895		-
3	-	0.837	0.977	-

Tabelle 6.17 Indirekte Anpassung der Steifigkeitsmatrix über die Minimierung des Beobachtungsfehlers (Faktor der Beobachtereigenwerte: 0.99)

durchgezogen : Beobachter
 gestrichelt (lange Striche) : Messwert
 gestrichelt (kurze Striche) : Beobachterfehler

Anzahl der Zeitschritte : 512
 Meßzeit : 0.25 sec

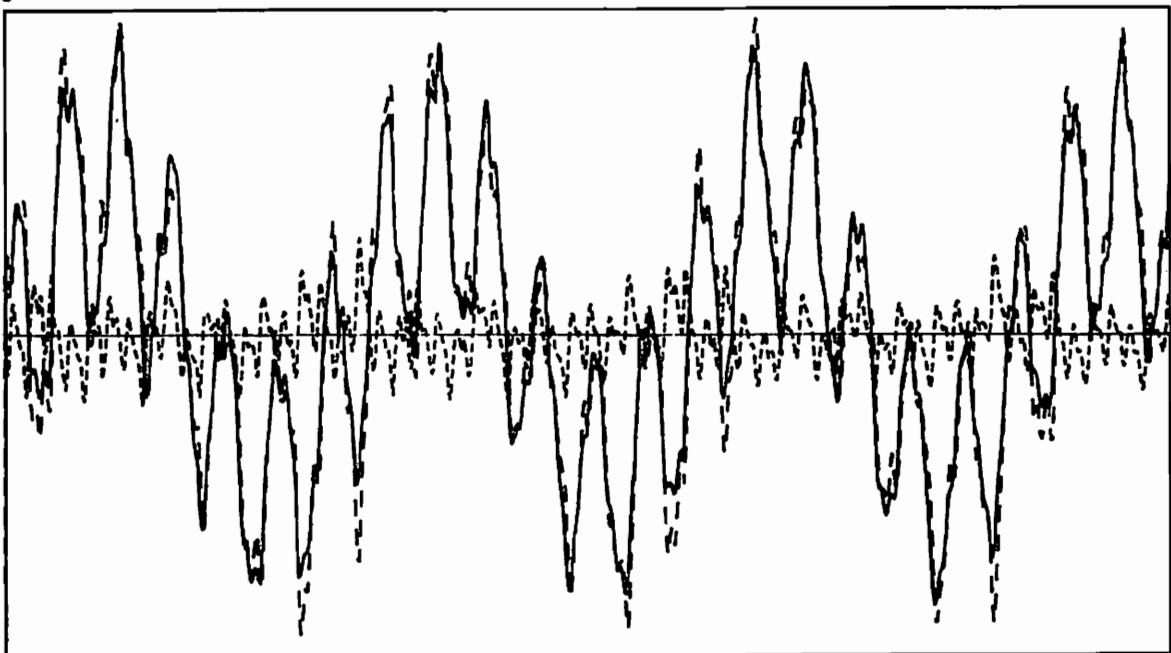


Bild 6.14 Beobachter für den Balken vor der Parameteranpassung (Faktor : 0.99)

durchgezogen : Beobachter
gestrichelt (lange Striche) : Messwert
gestrichelt (kurze Striche): Beobachterfehler

Anzahl der Zeitschritte : 512
Meßzeit : 0.25 sec

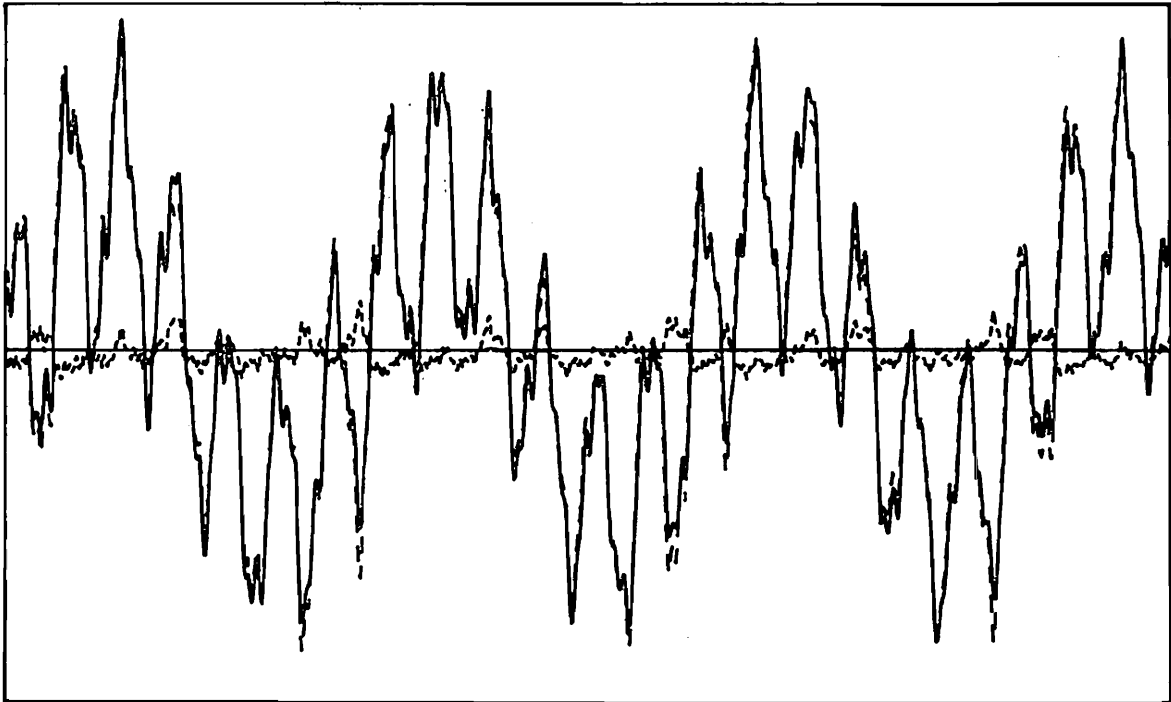


Bild 6.15 Beobachter für den Balken nach Anpassung der Eigenfrequenzen (Faktor der Eigenfrequenzen der Matrix F : 0.99)

durchgezogen : Beobachter
gestrichelt (lange Striche) : Messwert
gestrichelt (kurze Striche): Beobachterfehler

Anzahl der Zeitschritte : 512
Meßzeit : 0.25 sec

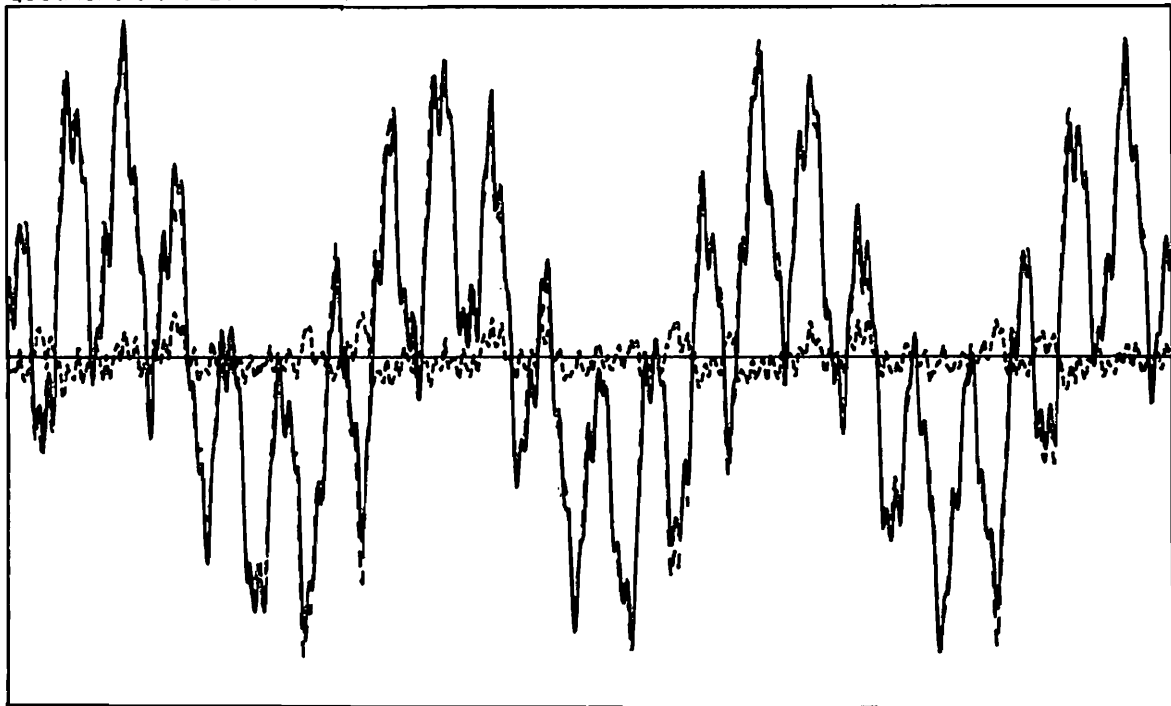


Bild 6.15 Beobachter für den Balken nach Anpassung der Steifigkeitsmatrix (Faktor der Eigenfrequenzen der Matrix F : 0.99)

durchgezogen : Beobachter
gestrichelt (lange Striche) : Messwert
gestrichelt (kurze Striche) : Beobachterfehler

Anzahl der Zeitschritte : 512
Meßzeit : 0.25 sec

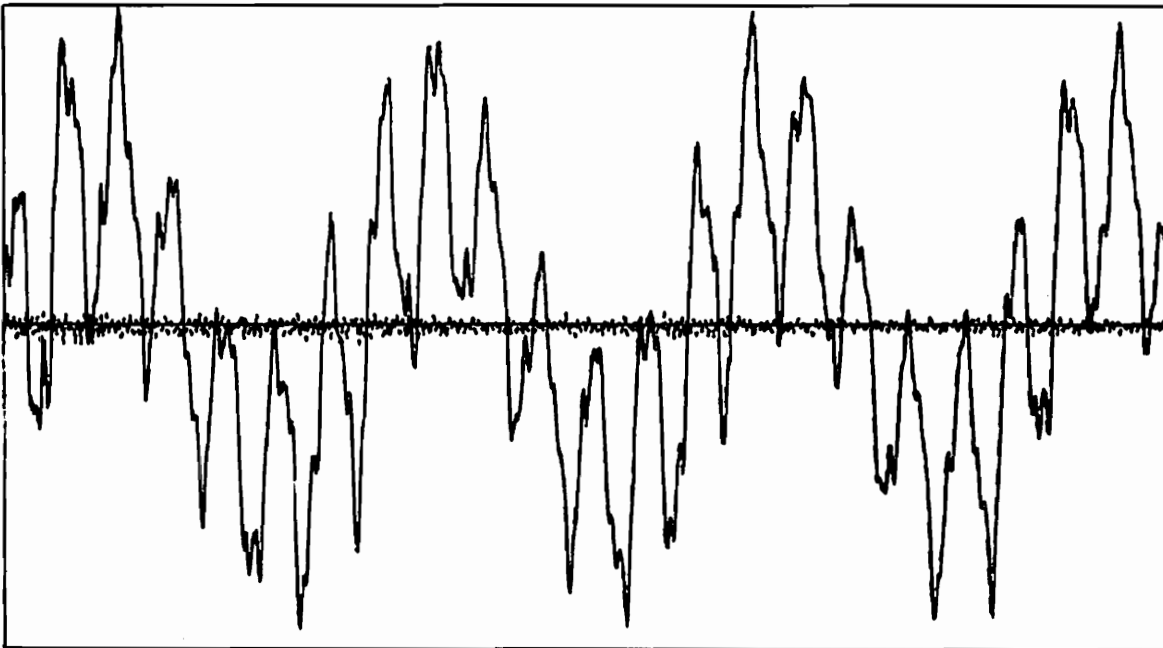


Bild 6.17 Beobachter für den Balken vor der Parameteranpassung (Faktor der Eigenfrequenzen der Matrix F : 0.8)

Die Bilder 6.14 bis 6.16 zeigen einen sehr langsamen Beobachter (Die Beobachtereigenwerte sind um den Faktor 0,99 kleiner als die des Systems), der zwar noch einen relativ großen Beobachtungsfehler aufweist, aber gute Identifikationsergebnisse liefert (s. Tabelle 6.17). Hier wird die Verbesserung des Beobachters durch die Anpassung der Systemeigenfrequenzen besonders deutlich.

In Bild 6.17 ist die Zustandsschätzung eines schnellen Beobachters (Faktor 0.8) vor der Eigenfrequenzanpassung dargestellt. Der Beobachter hier ist wesentlich besser als der obige, aber die Anpassung der Eigenfrequenzen führt auf keine sinnvollen Werte. Hier bestätigt sich, wie schon in Abschnitt 4.5 theoretisch hergeleitet wurde, daß langsame Beobachter günstiger für eine Parameteranpassung der Systemmatrix sind als schnelle. Bei langsamen Beobachtern wird die Zustandsschätzung vorwiegend durch die Simulation bestimmt, während bei schnellen Beobachtern das Korrekturglied, d.h. die Rückführung des Beobachtungsfehlers, dominiert.

direkt gemessene Eigenfrequenzen				
	Eigenfrequenz Nr.			
	1	2	3	4
	16.75	88.7	242	483
1. Anpassung der Eigenfrequenzen				
Iterations- schritt	Eigenfrequenz Nr.			
	1	2	3	4
0	17.10	89.6	250	494
1	16.76	88.7	242	484
2	16.76	88.7	242	484
1. Anpassung der Steifigkeitsmatrix an die verbesserten Eigenfrequenzen				
Lauf.Nr.	Korrekturparameter			
1	0.932		0.977	
2	1.049	0.893	-	
2. Anpassung der Eigenfrequenzen				
Iterations- schritt	Eigenfrequenz Nr.			
	1	2	3	4
0	16.70	88.7	242	485
1	16.76	88.7	242	484
2	16.76	88.7	242	484
1. Anpassung der Steifigkeitsmatrix an die verbesserten Eigenfrequenzen				
Lauf.Nr.	Korrekturparameter			
1	0.932		0.976	
2	1.048	0.758	-	

Tabelle 6.18 Indirekte Anpassung der Steifigkeitsmatrix über die Minimierung des Beobachtungsfehlers (Faktor der Beobachtereigenwerte: 0.96)

durchgezogen : Beobachter

gestrichelt (lange Striche) : Messwert

gestrichelt (kurze Striche) : Beobachterfehler

Anzahl der Zeitschritte : 512

Meßzeit : 0.25 sec

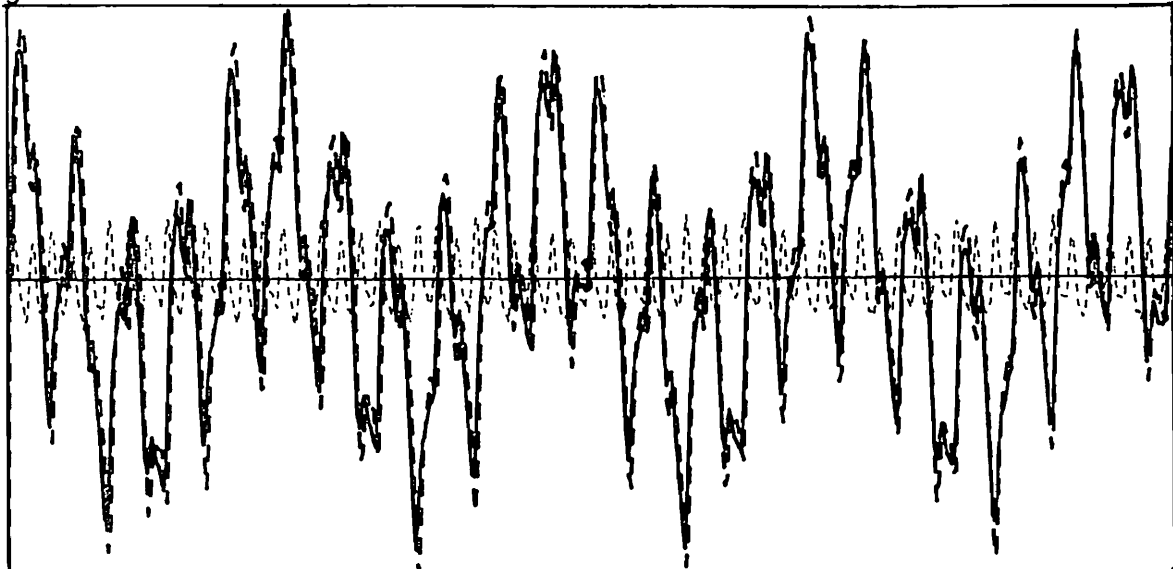


Bild 6.18 Beobachter für den Balken vor Anpassung der Steifigkeitsmatrix (Faktor : 0.96)

durchgezogen : Beobachter
gestrichelt (lange Striche) : Messwert
gestrichelt (kurze Striche) : Beobachterfehler

Anzahl der Zeitschritte : 512
Meßzeit : 0.25 sec

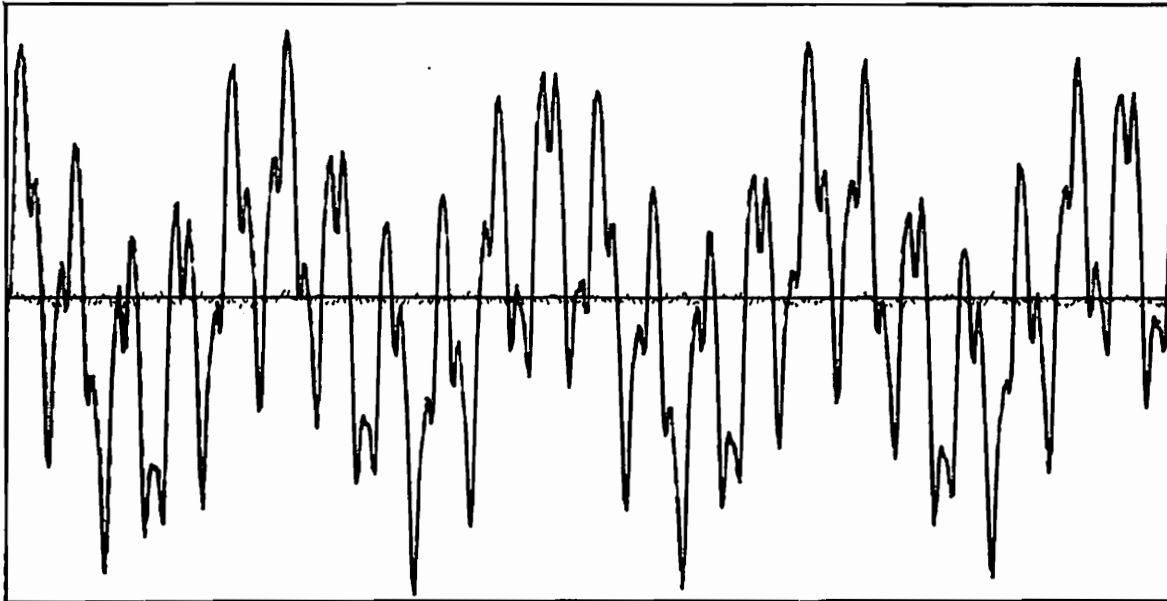


Bild 6.19 Beobachter für den Balken nach Anpassung der Steifigkeitsmatrix (Faktor der Eigenfrequenzen der Matrix $F : 0.96$)

Als Kompromiß ergab ein Beobachter mit dem Faktor 0.96 gute Anpassungsergebnisse und eine brauchbare Zustandsschätzung. In Tabelle 6.16 und in den Bildern 6.18 und 6.19 sind die Ergebnisse eines etwas veränderten Versuchsaufbaus dargestellt. Es handelt sich hier um freie Schwingungen des Balkens mit eingebauter Feder für die Wegerregung ($w(t)=0$) und es wurde mit 5 Balkenelementen gerechnet.

6.5.2 Direkte Anpassung der Balkenparameter

Anhand des Balkenversuchsstandes soll nun gezeigt werden, daß die in Abschnitt 4.4 beschriebene direkte Anpassung der Korrekturparameter der Steifigkeitsmatrizen des Balkens auch möglich ist. Bei Systemen mit einer derartig großen Anzahl von Freiheitsgraden erscheint es allerdings sinnvoller, die indirekte Parameteranpassung zu wählen, da hier nicht bei jedem Iterationsschritt zur Verbesserung der Beobachtermatrizen das Eigenwertproblem neu gelöst werden muß. Der Vorteil dieser direkten Anpassung ist allerdings, daß man mit den Korrekturparametern der Steifigkeitsmatrizen eine Schadensfrüherkennung sofort durchführen kann.

Es wurde bei den Rechenläufen (s. Tabelle 6.19) mit dem Rechenmodell des unbeschädigten Balkens (alle Korrekturparameter gleich 1) ein Beobachter entworfen und eine Zustandsschätzung der freien Schwingungen des beschädigten Balkens mit gleichzeitiger Bestimmung der Korrekturparameter der Steifigkeitsmatrix durchgeführt. Auch hier erwies sich ein Beobachter, der wesentlich langsamer war als der optimale (betragsmäßig größere Eigenwerte), für die Parameteranpassung als günstiger. Die verschiedenen Iterationsschritte wurden mit denselben Meßdaten durchgeführt. Eine starke Ver-

größerung einzelner Korrekturparameter wurde durch ein nichtlineares Gütekriterium für die Abweichung der angepaßten Parameter von den Ausgangswerten verhindert ($c_1=10$, $c_2=30$, $c_3=10$, $c_4=30$ in Gleichung 3.48). Der für diese Rechenläufe verwendete Beobachter war ein "modaler Beobachter", der mit 4 Eigenfrequenzen (8 Freiheitsgrade) arbeitet. Er wurde als "optimaler Beobachter" entworfen.

Iterations- schritt	Korrekturparameter der Steifigkeiten der Balkenelemente					
	1	1	1	1	1	1
0						
1	0.914	0.919	1.028	1.013	0.964	1.029
2	0.959	0.820	1.104	0.918	0.995	1.090
3	1.064	0.720	1.094	0.848	1.088	1.080
4	1.034	0.717	1.077	0.893	1.074	1.069
5	0.982	0.721	1.075	0.928	1.074	1.071
6	0.984	0.720	1.078	0.928	1.075	1.072
7	0.977	0.720	1.077	0.932	1.075	1.072

Tabelle 6.19 Direkte Anpassung der Korrekturparameter der Steifigkeiten der einzelnen Balkenelemente

Anhand von Tabelle 6.19 ist zu sehen, daß man mit 3 Iterationsschritten schon brauchbare Ergebnisse erzielt und nach 5 Iterationsschritten sind kaum noch Veränderungen der Korrekturparameter zu erkennen.

In Tabelle 6.20 sind die mit den angepaßten Korrekturparametern der Steifigkeitsmatrix berechneten Eigenfrequenzen für die einzelnen Iterationsschritte aufgeführt. Die 5. Eigenfrequenz wurde von dem Beobachter nicht berücksichtigt. Durch die Verbesserung des Rechenmodells stimmt sie aber trotzdem gut mit der direkt identifizierten Frequenz überein. Schon nach dem 1. Iterationsschritt stimmen die Eigenfrequenzen des Rechenmodells recht gut mit den vorab identifizierten überein.

Iterations- schritt	Eigenfrequenzen, berechnet mit den Korrekturparametern aus Tabelle 6.19				
	14.2	89.0	249	490	816
0					
1	13.7	88.2	245	484	809
2	13.7	88.0	243	484	809
3	13.6	88.0	242	483	804
4	13.6	88.3	242	483	805
5	13.5	88.3	242	483	805
6	13.5	88.3	242	483	806
7	13.4	88.3	242	483	806
identifizierte Eigenfrequ.	13.97	88.6	245	486	804

Tabelle 6.20 Eigenfrequenzen des Rechenmodells, berechnet mit den Korrekturparametern nach Tabelle 6.19

An den Bildern 6.20 und 6.21 ist zu erkennen, daß mit der Verbesserung des Rechenmodells eine deutliche Verbesserung des Beobachters erreicht werden kann.

durchgezogen : Beobachter
gestrichelt (lange Striche) : Messwert
gestrichelt (kurze Striche) : Beobachterfehler

Anzahl der Zeitschritte : 512
Meßzeit : 0.25 sec

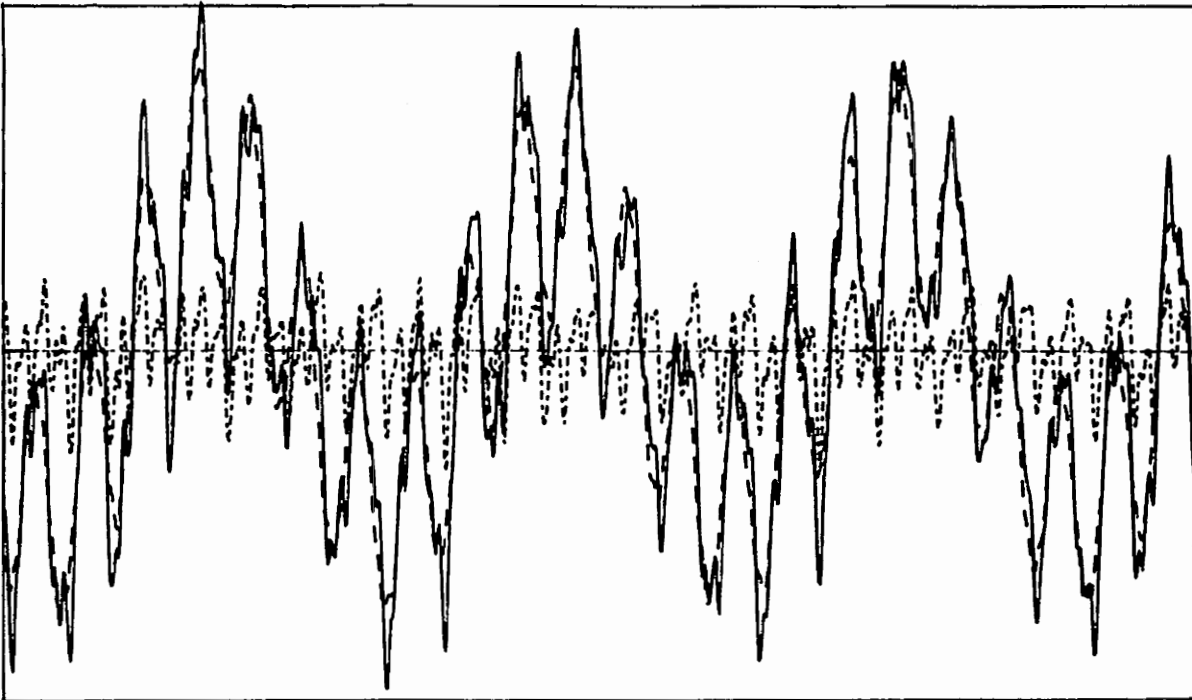


Bild 6.20 Beobachter für den Balken vor der Anpassung der Steifigkeitsmatrix

durchgezogen : Beobachter
gestrichelt (lange Striche) : Messwert
gestrichelt (kurze Striche) : Beobachterfehler

Anzahl der Zeitschritte : 512
Meßzeit : 0.25 sec

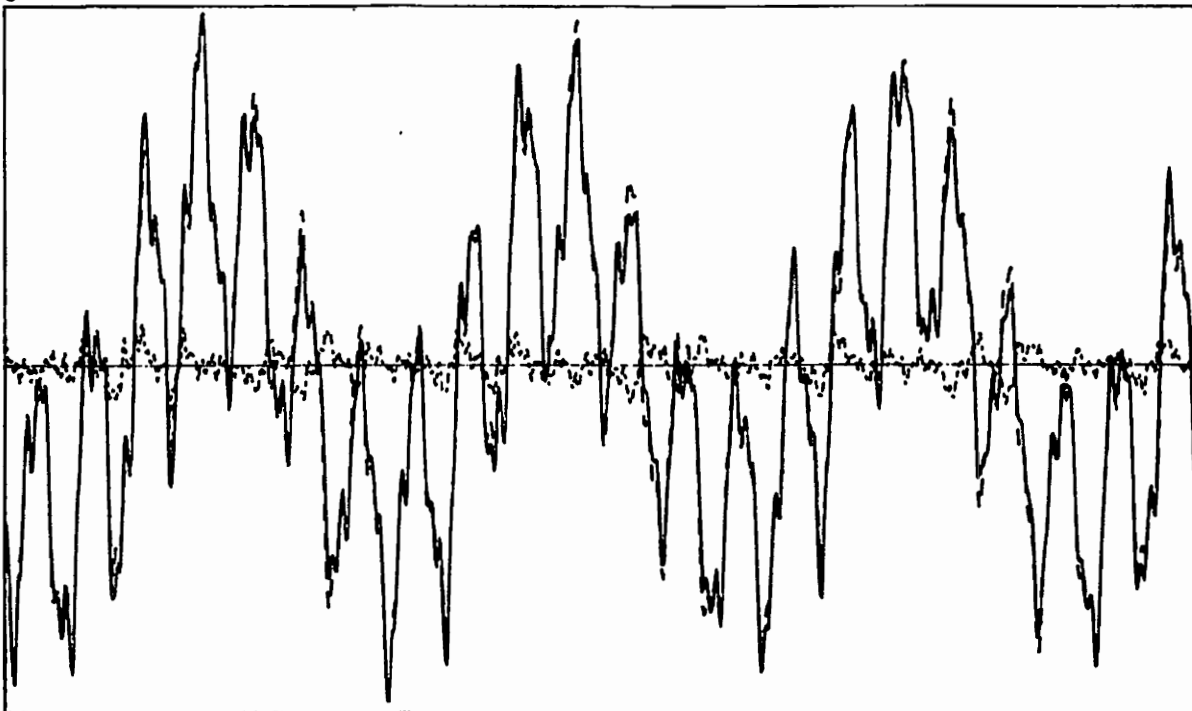


Bild 6.21 Beobachter nach dem 3. Iterationsschritt zur Anpassung der Steifigkeitsmatrix

6.6 Anpassung des Balkenparameters bei wegerregten Schwingungen

6.6.1 Modellierung der Dämpfungsmatrix und der Wegerregung

Der Balken wurde an dem nicht eingespannten Ende mit Hilfe eines Shakers erregt (s. Bild 6.1). Es handelte sich dabei um eine Wegerregung, die über eine Feder mit dem System gekoppelt wurde. Da sich der Balken nun an seinem Ende nicht mehr frei bewegen kann, muß die Federsteifigkeit in der Gesamtsteifigkeitsmatrix des Balkens eingebaut werden. Sie wird auf der Hauptdiagonalen an der Stelle, die zu dem letzten Wegfreiheitsgrad gehört, zuaddiert.

Da die Steifigkeit der Feder nicht genau bekannt war, und auch, um die mit dem Beobachter bestimmten Eigenfrequenzen kontrollieren zu können, wurde das um die Federn erweiterte System zunächst mit einem Hammerschlag erregt und die Eigenfrequenzen direkt gemessen (s. Tabelle 6.21). An diese Werte wurden dann die Federsteifigkeiten von Einspannung und Wegerregung, wie schon in Abschnitt 3.5 beschrieben, angepaßt.

	Eigenwert Nr.				
	1	2	3	4	5
Eigenfrequenz [Hz]	16.75	88.73	242.1	483.7	802.2
Dämpfung [1/sec]	0.2	0.25	0.6	1.0	1.9

Tabelle 6.21 Direkt gemessene Eigenfrequenzen des beschädigten Balkens mit Vorrichtung für die Wegerregung

Es ergaben sich folgende Werte

Feder der Einspannung : $1 \cdot 10^7$ N/m
Drehfeder der Einspannung : 2600 Nm/rad
Feder der Erregung : 176 N/m

Bei der Bestimmung der Dämpfungsmatrix wurde Wert darauf gelegt, daß die modalen Dämpfungsparameter des Rechenmodells mit den identifizierten Werten übereinstimmen. Gerade bei einer Sweepanregung oder einer Anregung durch Rauschen hängt die Amplitude der einzelnen Eigenschwingungen stark von der Dämpfung ab. Es wurde deshalb mit einem iterativen Verfahren gearbeitet, bei dem, ausgehend von dem modal transformierten System, in daß die gemessenen Dämpfungsparameter eingesetzt werden, mit Hilfe der Normierungsbedingungen der Eigenvektoren (Gl. 2.51 und 2,52) die Dämpfungsmatrix **D** bestimmt wurde. Die für die Transformation benötigten Eigenvektoren werden zunächst für das ungedämpfte System berechnet und dann iterativ mit Hilfe der geschätzten **D**-Matrix verbessert.

Mit

$$\mathbf{Z} \Phi^T \mathbf{D}^* \Phi = \mathbf{I} \quad \text{und} \quad \mathbf{Z} \Phi^T \mathbf{K}^* \Phi = \mathbf{\Lambda}$$

gilt

$$\mathbf{D}^* = (\mathbf{\Lambda} \mathbf{Z} \Phi^T)^{-1} \mathbf{Z} \Phi^T \mathbf{K}^*$$

$$\mathbf{D}^* = \begin{vmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{vmatrix}$$

\mathbf{D} ist dann die entsprechende Teilmatrix von \mathbf{D}^* .

Es wurde so lange iteriert, bis die mit \mathbf{D} bestimmten modalen Dämpfungsparameter eine zufriedenstellende Übereinstimmung mit den gemessenen Werten zeigten. Nach der Anpassung der Dämpfungsmatrix und der Federsteifigkeiten ergaben sich die in Tabelle 6. aufgeführten Eigenwerte des Rechenmodells.

	Eigenwert Nr.				
	1	2	3	4	5
Eigenfrequenz [Hz]	16.75	89.1	250	492	817
Dämpfung [1/sec]	0.2	0.25	0.6	1.0	1.9

Tabelle 6.22 Eigenfrequenzen des Rechenmodells des unbeschädigten Balkens mit Vorrichtung für die Wegerregung

Die Differentialgleichung des wegerregten Systems lautet:

$$\mathbf{M} \ddot{\xi}(t) + \mathbf{D} \dot{\xi}(t) + \tilde{\mathbf{K}} \xi(t) = \mathbf{b} x_E(t)$$

mit

$$\mathbf{b}^T = \left| 0, 0, \dots, 0, k_2, 0 \right|$$

$x_E(t)$: Wegerregung

k_2 : Federsteifigkeit (s. Bild 6.2)

$\tilde{\mathbf{K}}$: um k_2 erweiterte Gesamtsteifigkeitsmatrix

oder in Zustandsraumdarstellung

$$\begin{vmatrix} \dot{\xi} \\ \xi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\tilde{\mathbf{K}} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi \\ \dot{\xi} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b} \end{vmatrix} x_E$$

6.6.2 Abschätzung der unbekannt Systemeingänge

Für den Entwurf eines Beobachters ähnlich einem Kalman-Filter, und auch für den

erweiterten Kalman-Filter benötigt man neben der Varianzmatrix der Meßfehler die Varianzmatrix der unbekannt Systemeingänge (Systemstörungen). Sie können einmal dadurch bestimmt werden, daß man für das modal transformierte System abschätzt, welche Eigenschwingungen wie stark gestört werden. Mit diesem Wert läßt sich dann ein modaler Beobachter entwerfen. Diese Vorgehensweise hat sich für die Beobachtung von freien Schwingungen als brauchbar erwiesen. Bei erregten Schwingungen erscheint es sinnvoll, die Struktur des Systems der Erregungen genauer zu berücksichtigen.

Am besten lassen sich die unbekannt Eingänge normalerweise als Kraftgrößen abschätzen, die auf die einzelnen Systemfreiheitsgrade wirken. Die Differentialgleichung hat dann die Form

$$\mathbf{M} \ddot{\xi}(t) + \mathbf{D} \dot{\xi}(t) + \tilde{\mathbf{K}} \xi(t) = \mathbf{b} \xi_E(t) + \boldsymbol{\eta}$$

$\boldsymbol{\eta}$: unbekannte Eingänge

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\tilde{\mathbf{K}} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b} \end{bmatrix} \xi_E + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \boldsymbol{\eta}$$

und nach der Modaltransformation und Reduktion der Freiheitsgrade gilt:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A} \mathbf{q} + \underbrace{\Phi^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}^*} \xi_E + \underbrace{\Phi^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{st}^*} \boldsymbol{\eta}$$

Da die unbekannt Eingangsgrößen für das zeitkontinuierliche System bestimmt worden sind, muß noch der Übergang zum zeitdiskreten System durchgeführt werden.

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{A}_{dis} \mathbf{q}_k + \mathbf{B}_{dis}^* \mathbf{u}_k + \underbrace{\mathbf{B}_{stdis}^*}_{\boldsymbol{\eta}_k^*} \boldsymbol{\eta}_k$$

Die Varianzmatrix, die für den Beobachterentwurf benötigt wird, lautet:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= E[\boldsymbol{\eta}_k^* \boldsymbol{\eta}_k^{*T}] = E[\mathbf{B}_{stdis}^* \boldsymbol{\eta}_k \boldsymbol{\eta}_k^T \mathbf{B}_{stdis}^{*T}] \\ &= \mathbf{B}_{stdis}^* E[\boldsymbol{\eta}_k \boldsymbol{\eta}_k^T] \mathbf{B}_{stdis}^{*T} \end{aligned}$$

Sind die Störungen unkorreleirt, dann gilt

$$\mathbf{V} = \mathbf{B}_{stdis}^* \text{diag} [E[\eta_{k_i}^2]] \mathbf{B}_{stdis}^{*T}$$

6.6.3 Bestimmung des Verstärkungsfaktors des Eingangssignals

Bei den kapazitiven Wegaufnehmern, die für die Messung von Eingangssignal und Balkenschwingung verwendet werden, lassen sich die Absolutwerte der Schwingungsamplitude nur schwer bestimmen. Sie hängen stark von dem Abstand zwischen Meßobjekt und Wegaufnehmer ab. Um dadurch verursachte Ungenauigkeiten bei der Beobachtung zu verhindern, wurde für das Eingangssignal ein Verstärkungsfaktor angesetzt, der, wie in Abschnitt 4.7 beschrieben, über eine Minimierung des Beobachtungsfehlers bestimmt und dann in die \mathbf{B} -Matrix eingearbeitet wurde. Die Verbesserung des Beobachters nach der

Anpassung der Eingangsmatrix ist an den Bildern 6.22 und 6.23 deutlich zu sehen. Der Wert des so bestimmten Verstärkungsfaktors betrug 4.6.

durchgezogen : Beobachter
gestrichelt (lange Striche) : Messwert
gestrichelt (kurze Striche) : Beobachterfehler

Anzahl der Zeitschritte : 512
Meßzeit : 0.25 sec

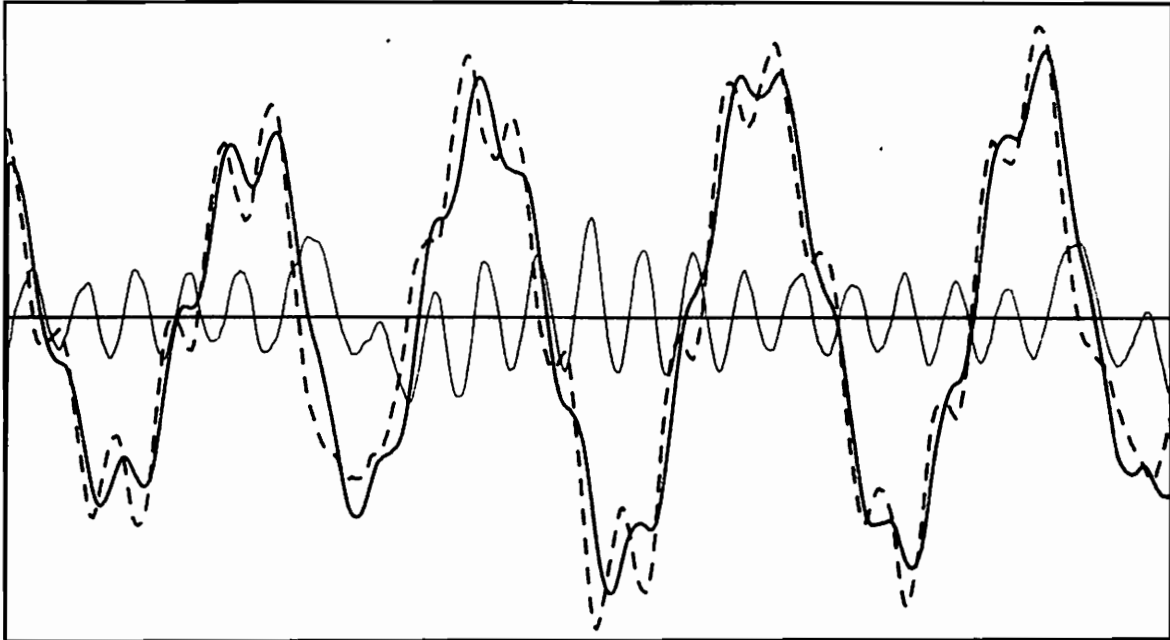


Bild 6.22 Beobachtung einer erregten Balkenschwingung vor Anpassung des Verstärkungsfaktors (6 Beobachterfreiheitsgrade)

durchgezogen : Beobachter
gestrichelt (lange Striche) : Messwert
gestrichelt (kurze Striche) : Beobachterfehler

Anzahl der Zeitschritte : 512
Meßzeit : 0.25 sec

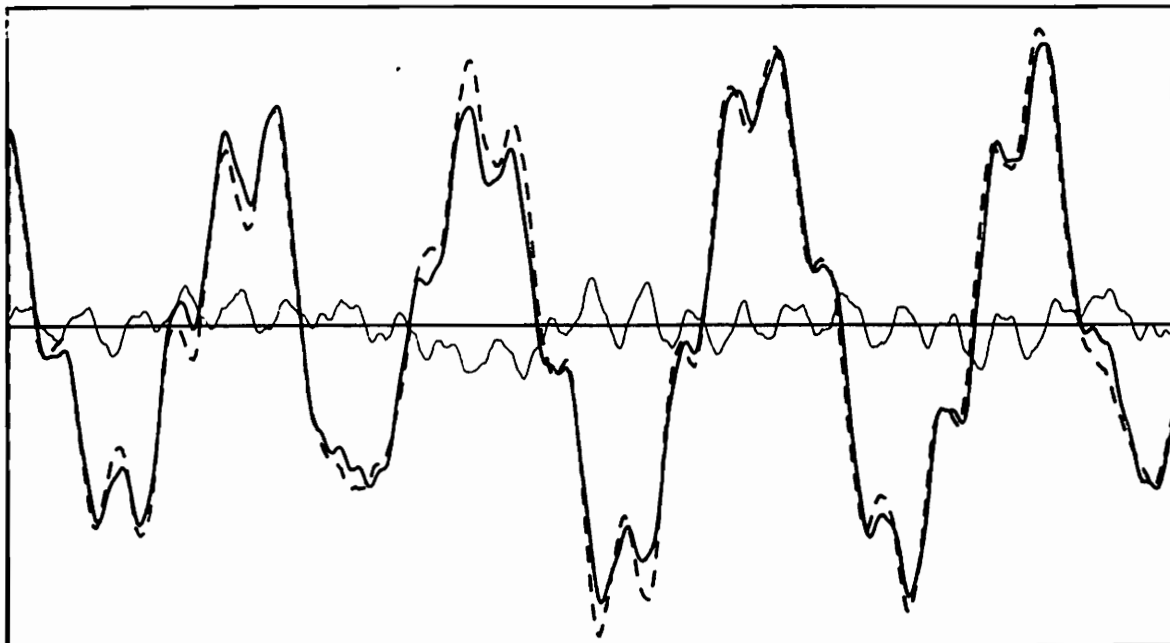


Bild 6.23 Beobachtung einer erregten Balkenschwingung nach Anpassung des Verstärkungsfaktors (6 Beobachterfreiheitsgrade)

6.6.4 Beobachtung und indirekte Anpassung der Steifigkeitsmatrix des Balkens

Nach den bisher beschriebenen Vorarbeiten (Optimierung des Rechenmodells mit Hilfe gemessener Eigenfrequenzen, Bestimmung des Verstärkungsfaktors des Eingangssignals) bereitet die Beobachtung der Balkenschwingungen keine großen Schwierigkeiten. Der Beobachter wurde als "optimaler Beobachter" und als Beobachter mit vorwählbaren Eigenwerten von F entworfen. Es zeigte sich, daß gerade bei harmonischen Erregungen schon mit wenig Beobachterfreiheitsgraden gute Beobachtungsergebnisse zu erzielen sind. So reicht z.B. bei einer Erregungsfrequenz zwischen der 1. und 2. Eigenfrequenz ein Beobachter aus, der nur die ersten beiden Eigenfrequenzen berücksichtigt (4 Beobachterfreiheitsgrade).

Problematisch ist hier, die Anpassung der Eigenfrequenzen über eine Minimierung des Beobachtungsfehlers und damit die Anpassung des Rechenmodells bzw. eine Schadensfrüherkennung. Die Güte einer solchen Anpassung hängt im wesentlichen von der Art der Anregung ab. Sobald sich das System auf eine harmonische Erregung eingeschungen hat, ist aus dem Schwingungsverhalten keine Information mehr über die Eigenfrequenzen des Systems zu gewinnen. Diese lassen sich dann auch nicht anpassen. Hier liegt eine Einschränkung für die Anwendung des in Abschnitt 4 beschriebenen Verfahrens zur Verbesserung eines Rechenmodells mit Hilfe eines Beobachters. Im Schwingungssignal müssen neben der Erregung auch die Eigenschwingungen enthalten sein. Dies ist z.B. bei einer Anregung durch Rauschen (weiß oder farbig), durch eine Erregung mit veränderlichen Frequenzen oder durch impulsförmige Erregungen (auch häufig wiederkehrend) der Fall.

In den nachfolgenden 2 Beispielen wurde mit Sweeperregungen gearbeitet. Es handelte sich dabei um Sweeps, die in kurzen Abständen wiederholt wurden. Wegen der Resonanzüberhöhungen beim Durchgang der Sweeps durch die Eigenfrequenzen waren diese in dem Meßsignal der Balkenschwingungen deutlich vertreten.

Im folgenden sind die Ergebnisse der Anpassung von Eigenfrequenzen und Steifigkeitsparametern aufgeführt. Es ist das indirekte Verfahren zur Anpassung der Steifigkeitsmatrix über die Minimierung des Beobachtungsfehlers verwendet worden. Es sollte wieder das angesägte Balkenelement aufgefunden werden.

In Tabelle 6.23 und in den Bildern 6.24 und 6.25 sind die Ergebnisse dargestellt, die mit einem "optimalen Beobachter" entworfen worden sind.

1. Anpassung der Eigenfrequenzen				
Iterations- schritt	Eigenfrequenz Nr.			
	1	2	3	4
0	17.10	89.6	250	493
1	16.96	88.8	250	493
2	16.92	88.9	250	492
1. Anpassung der Steifigkeitsmatrix an die verbesserten Eigenfrequenzen				
Lauf.Nr.	Korrekturparameter			
1	0.980		0.991	
2	0.953	1.017	-	
2. Anpassung der Eigenfrequenzen				
Iterations- schritt	Eigenfrequenz Nr.			
	1	2	3	4
0	16.90	89.2	250	492
1	16.96	88.9	250	492
2	16.96	88.9	249	492
1. Anpassung der Steifigkeitsmatrix an die verbesserten Eigenfrequenzen				
Lauf.Nr.	Korrekturparameter			
1	0.980		0.991	
2	0.965	0.988	-	

Tabelle 6.23 indirekte Anpassung der Steifigkeitsmatrix bei erregten Schwingungen (optimaler Beobachter)

durchgezogen : Beobachter
 gestrichelt (lange Striche) : Messwert
 gestrichelt (kurze Striche) : Beobachterfehler

Anzahl der Zeitschritte : 512
 Meßzeit : 0.25 sec

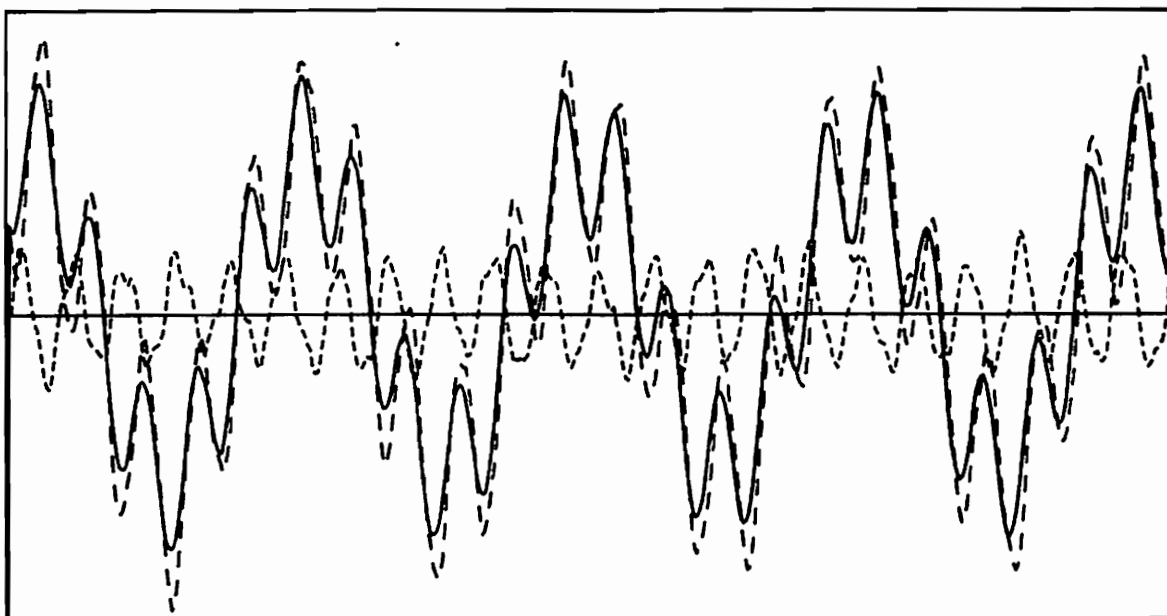


Bild 6.24 Beobachter vor Anpassung der Steifigkeitsmatrix ("optimaler Beobachter")

durchgezogen : Beobachter
gestrichelt (lange Striche) : Messwert
gestrichelt (kurze Striche) : Beobachterfehler

Anzahl der Zeitschritte : 512
Meßzeit : 0.25 sec

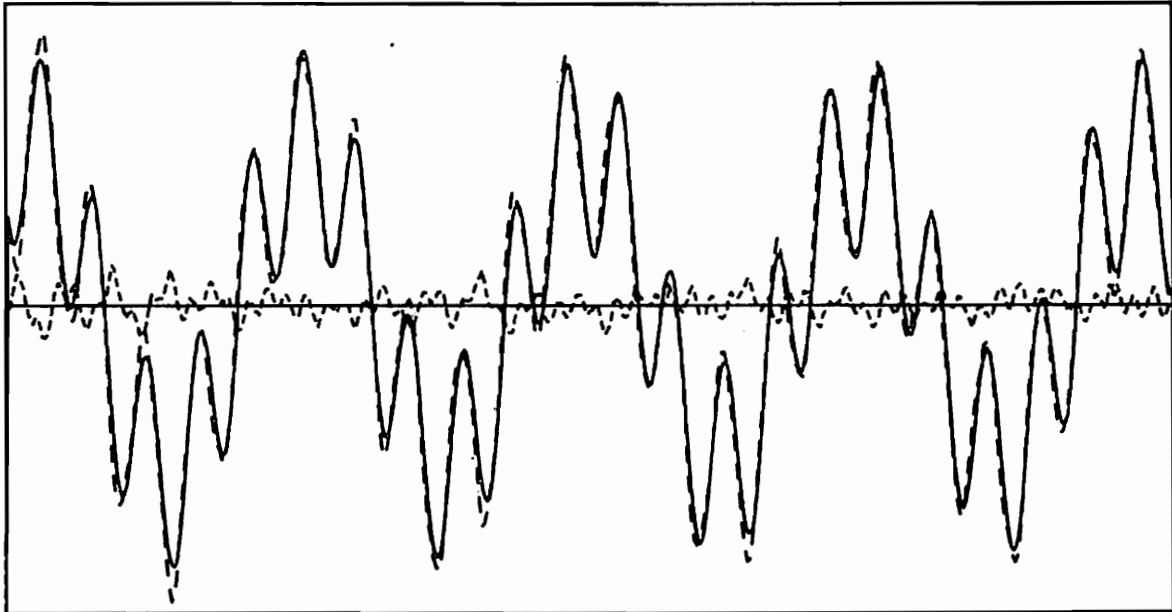


Bild 6.25 Beobachter nach Anpassung der Steifigkeitsmatrix ("optimaler Beobachter")

strich - punktiert : Eingangssignal

Anzahl der Zeitschritte : 512
Meßzeit : 0.25 sec

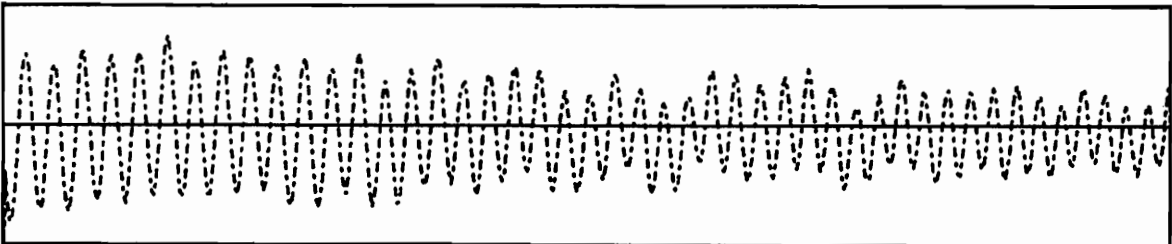


Bild 6.26 Wegerregung der in den Bildern 6.25 und 6.26 dargestellten Balkenschwingungen

Bei den in Tabelle 6.24 und in den Bildern 6.27 und 6.28 dargestellten Versuchen wurde der Beobachter mit vorwählbaren Eigenfrequenzen der Beobachtermatrix F entworfen. Die Eigenfrequenzen des Beobachters wurden um den Faktor 0.96 kleiner gewählt als die des Systems.

1. Anpassung der Eigenfrequenzen			
Iterations- schritt	Eigenfrequenz Nr.		
	1	2	3
0	17.10	89.6	250
1	16.61	89.3	247
2	16.61	89.2	242
1. Anpassung der Steifigkeitsmatrix an die verbesserten Eigenfrequenzen			
Lauf.Nr.	Korrekturparameter		
1	0.937		1.011
2	0.973	0.909	—
2. Anpassung der Eigenfrequenzen			
Iterations- schritt	Eigenfrequenz Nr.		
	1	2	3
0	16.70	88.8	246
1	16.61	89.0	242
1. Anpassung der Steifigkeitsmatrix an die verbesserten Eigenfrequenzen			
Lauf.Nr.	Korrekturparameter		
1	0.940		1.003
2	0.973	0.898	—

Tabelle 6.24 Indirekte Anpassung der Steifigkeitsmatrix über die Minimierung des Beobachtungsfehlers (Faktor der Beobachtereigenwerte: 0.96)

strich - punktiert : Eingangssignal

Anzahl der Zeitschritte : 512
Meßzeit : 0.25 sec

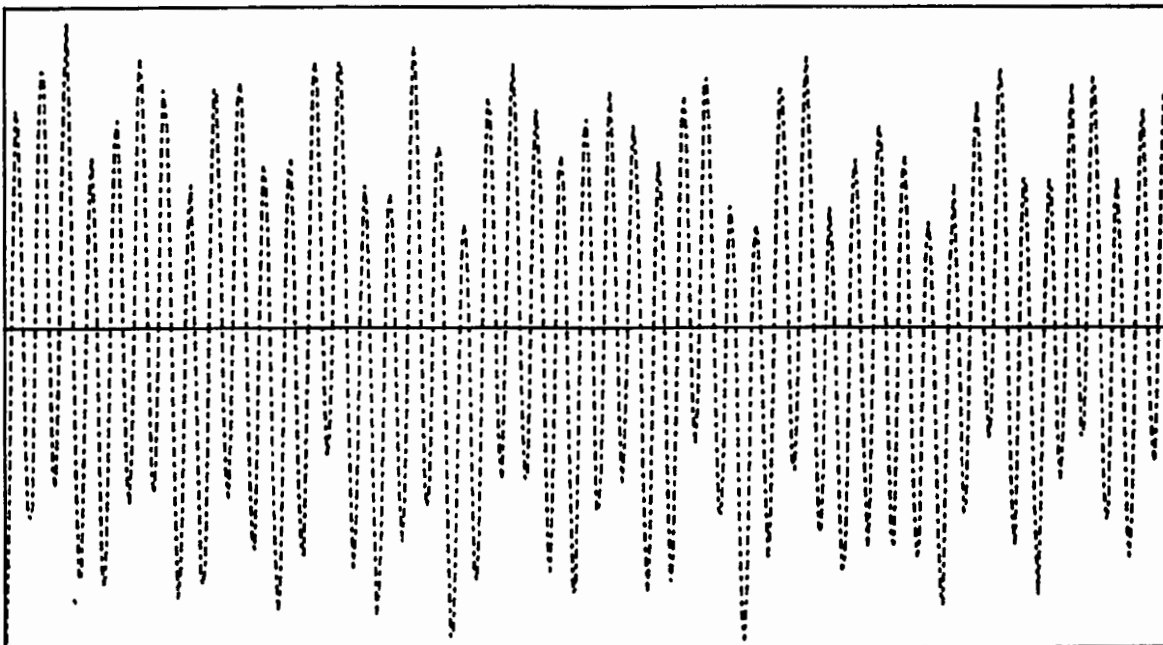


Bild 6.27 Wegerregung der in Bild 6.28 dargestellten Balkenschwingungen

durchgezogen : Beobachter
gestrichelt (lange Striche) : Messwert
gestrichelt (kurze Striche): Beobachterfehler

Anzahl der Zeitschritte : 512
Meßzeit : 0.25 sec

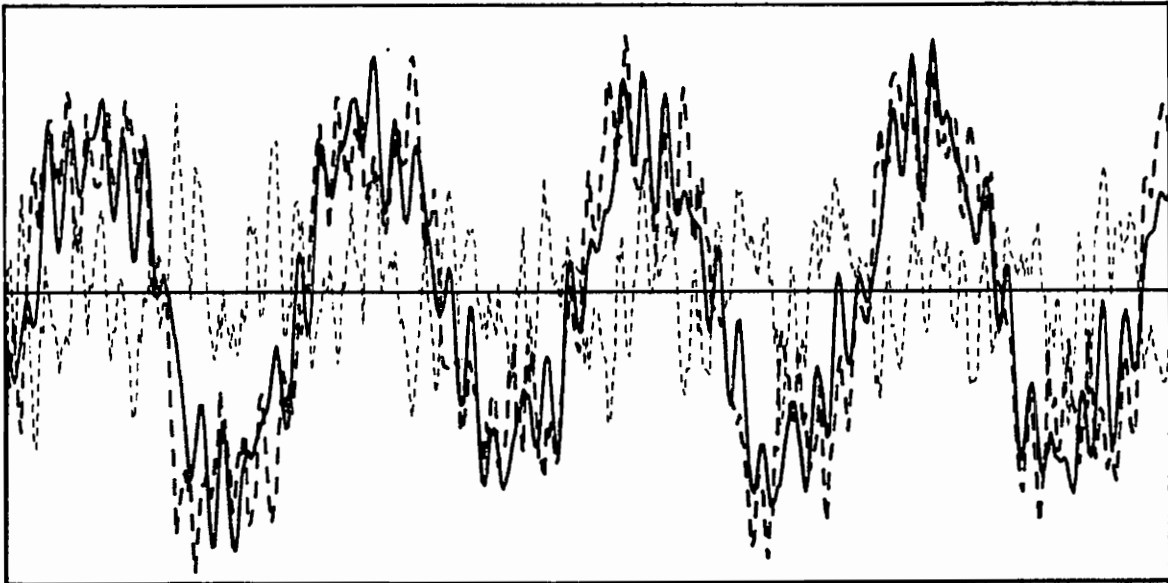


Bild 6.28 Beobachter nach Anpassung der Steifigkeitsmatrix (Faktor der Eigenfrequenzen von F 0.96)

Trotz der guten Anpassungsergebnisse von Eigenfrequenzen und Korrekturparametern konnte bei dem letzten Versuch keine wesentliche Verringerung des Beobachtungsfehlers festgestellt werden (das quadratische Gütekriterium ist auf $1/3$ des Ausgangswertes zurückgegangen). Der überlagerte Beobachtungsfehler, verursacht durch Meßungenauigkeiten, scheint zu groß zu sein.

7 Versuch mit rotierender Torsionswelle

7.1 Allgemeines

Für den Versuchsstand mit dem einseitig eingespannten Balken ließ sich ein gutes Rechenmodell erstellen, und auch die Messungen der Balkenschwingungen und der Erregung waren nicht sehr schwierig. Eine bessere Annäherung an die Problematik einer realen Maschine sollen die Versuche mit einer rotierenden Welle mit mehreren Schwungscheiben bringen, die zu Torsionsschwingungen angeregt wird. Die Schwungscheiben bestehen aus Stahl. Es wurden wegen des kleinen E-Moduls und der damit verbundenen niedrigen Systemeigenfrequenzen Versuche mit einer Plexiglaswelle und Versuche mit einer Aluminiumwelle durchgeführt.

Die Versuchsbedingungen für eine Schwingungsüberwachung mit einem Beobachter und vor allem für eine Anpassung der Wellensteifigkeiten über eine Minimierung des Beobachterfehlers sind nicht optimal. Da auf dem Versuchstisch wenig Platz zur Verfügung steht und aus Kostengründen möglichst serienmäßige Bauteile verwendet werden sollten, sind die Lager im Verhältnis zur Welle zu groß und die Schwungscheiben zu klein. Man erhält so schlecht modellierbare Einflüsse auf Schwingungsverhalten, wie z.B. eine große Lagerdämpfung und das nichtlineare Werkstoffverhalten der Plexiglaswelle. Wegen der größeren Steifigkeit der Aluminiumwelle sind die Eigenfrequenzen so groß, daß eine wesentlich höhere Abtastfrequenz als die maximal mögliche Frequenz von 256 Hz wünschenswert wäre. Dadurch, daß die Meßwerterfassung und Verstärkung auf der rotierenden Welle angebracht werden mußten, ist man in der Meßgenauigkeit eingeschränkt.

Trotz dieser Schwierigkeiten konnte für den Versuchsaufbau mit der Plexiglaswelle ein brauchbarer Beobachter entworfen und für den mit der Aluminiumwelle ein beschädigtes Bauteil aufgefunden werden. Es wurden zunächst die Eigenfrequenzen direkt gemessen und das Rechenmodell daran angepaßt. Mit diesem Rechenmodell ließ sich ein modaler Beobachter entwerfen und über eine Minimierung des Beobachterfehlers ein Verstärkungsfaktor für das Eingangssignal und eine konstante Verschiebung des Eingangssignals aus der Nullage bestimmen. Nach diesen Vorarbeiten sind die Torsionsschwingungen beobachtet und über eine Minimierung des Beobachtungsfehlers Eigenfrequenzen und Steifigkeitsparameter bestimmt worden.

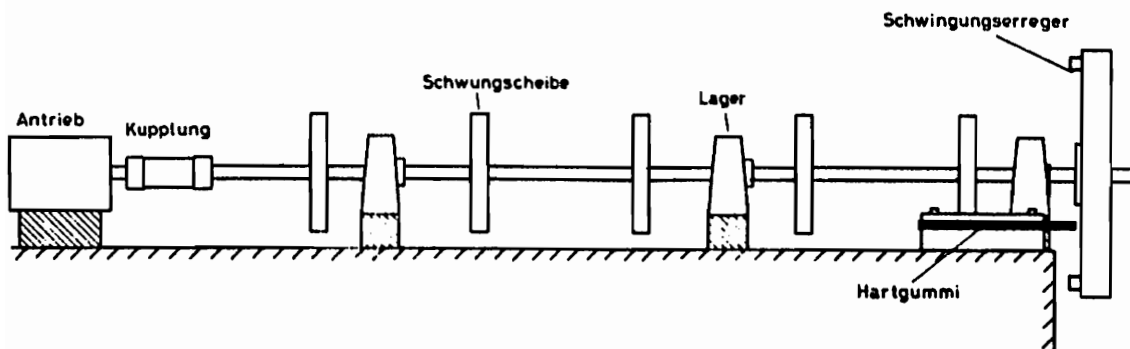


Bild 7.1 Torsionsversuchsstand

7.2 Meßwerterfassung

Um einen Beobachter für die rotierende Welle betreiben zu können, müssen das Eingangssignal, d.h. die Drehmomente, die die Torsionsschwingungen anregen und mindestens ein Meßsignal der Scheibenschwingungen erfaßt werden. Da nur Torsionsschwingungen beobachtet werden, war ein Meßverfahren zu wählen, das nur auf solche Schwingungen reagiert und Biegeschwingungen, bzw. Biegemomente möglichst wenig berücksichtigt. Es war zunächst geplant, mit je zwei Beschleunigungsaufnehmern an einer Scheibe zu arbeiten, die gegenüberliegend an der Scheibe angebracht (s. Bild 7.1) und deren Signale additiv zusammengefaßt werden.

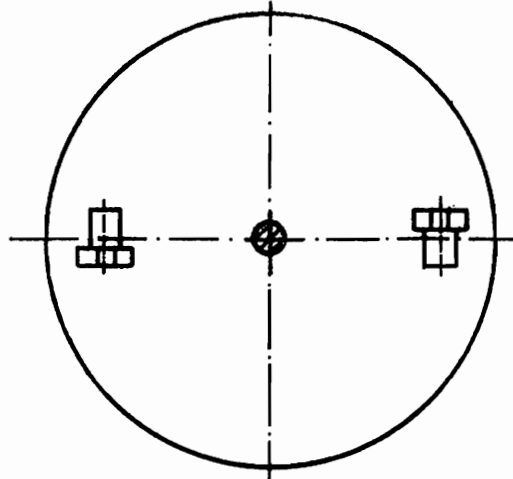


Bild 7.2 Messung der Torsionsschwingungen mit Beschleunigungsaufnehmern

Dieser Aufbau hätte den Vorteil gehabt, daß durch einfaches Ummontieren Meßsignale von unterschiedlichen Scheiben gewonnen werden können. Die Beschleunigungsaufnehmer erwiesen sich aber als zu unempfindlich bei den niedrigen Eigenfrequenzen der Welle. Aus diesem Grund wurde dann mit Dehnungsmeßstreifen gearbeitet, die, wie in Bild 7.3 gezeigt, zwischen den Scheiben auf die Welle aufgeklebt und verschaltet sind.

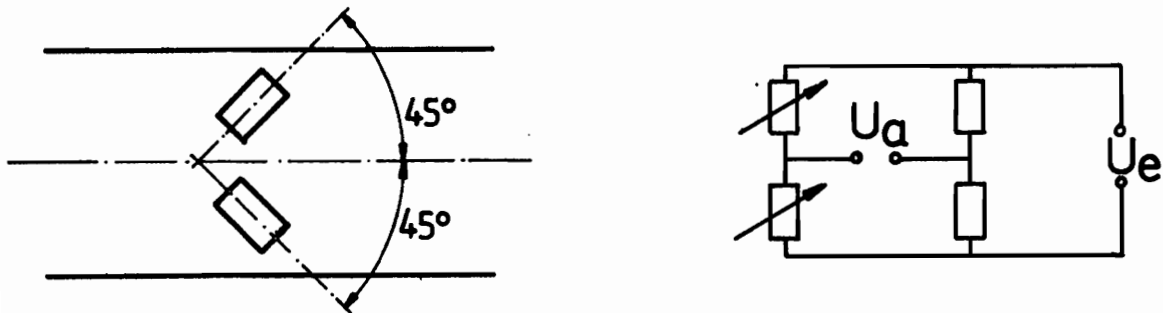


Bild 7.3 Anordnung der DMS auf der Welle

Mit dieser Anordnung werden nur Torsionen gemessen und keine Biegung oder Zugverformungen.

Die Dehnungsmeßstreifen sind zwischen den Scheiben II und III (s. Bild 7.3) und zwischen den Scheiben V und VI angebracht. Die Dehnungsmeßstreifen am Ende der Welle dienen zur Messung des Eingangssignals (s. Bild 7.4).

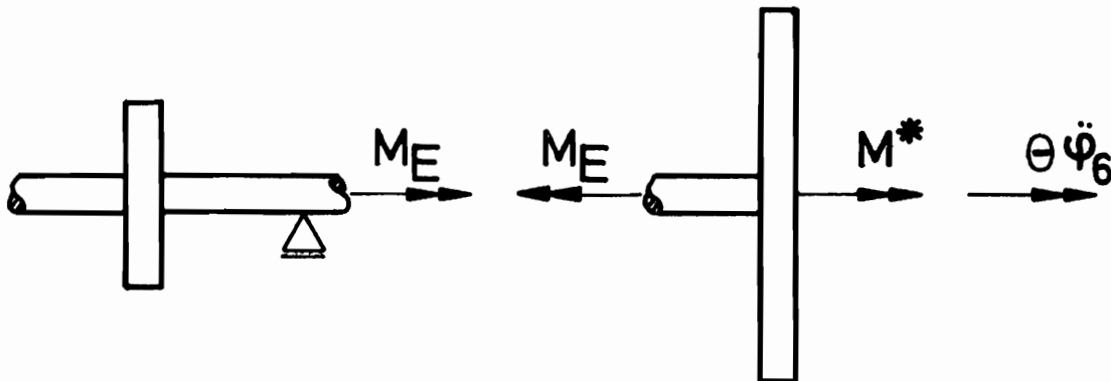


Bild 7.4 Messung der Eingangsmomente

Das eigentliche Rechenmodell enthält dann nur noch die übrigen 5 Scheiben. Das Eingangsmoment M ist proportional zur Verdrillung γ , die mit den Dehnungsmeßstreifen gemessen wird. Der andere Dehnungsmeßstreifen zwischen den Scheiben II und III mißt die Verdrillung des entsprechenden Wellenstücks, die wiederum proportional zur Winkel-differenz zwischen den Scheiben II und III ist.

Das Problem bei diesem Versuchsaufbau, wie auch bei der Messung an anderen Maschinen im Betrieb, ist, das Meßsignal von der rotierenden Welle auf die stehende Apparatur zur Meßwerterfassung zu übertragen. Zur Meßwerterfassung wurde eine Taktfrequenz von 256 Hz vorgesehen, d.h. in der Zeit von $1/256$ sec. müssen jeweils zwei Meßwerte erfaßt und übertragen werden.

Zur Lösung dieses Problems wurde folgendermaßen vorgegangen (s. Bild 7.5):

Die Dehnungsmeßstreifen sind als Wheatstonesche Brücke geschaltet. Die Ausgangsspannungen werden dann mit Hilfe von Operationsverstärkern so verstärkt, daß die Meßsignale im Bereich von ± 4 V liegen. Anschließend wird eine Spannung von 6 V zu dem Meßsignal addiert, so daß man nun einen Wertebereich von 2 V bis 10 V erhält. Diese Signale werden im Takt von 256 Hz gleichzeitig erfaßt und mit Hilfe von "Sample and Hold" Bausteinen gespeichert. Die gespeicherten Meßsignale werden dann nacheinander auf einem Spannungs-Frequenz-Wandler, der die anliegenden Spannungen im Bereich von 2 bis 10 V in Frequenzen von 20 kHz bis 100 kHz umwandelt. Diese Frequenzen lassen sich nun störungsfrei mit Hilfe einer Leuchtdiode an die stehende Apparatur zur Meßwert-erfassung übermitteln. Die Leuchtdiode ist am freien Ende der Welle mittig angebracht.

Der komplette bisher beschriebene Aufbau befindet sich auf der rotierenden Welle. Die Stromversorgung erfolgt über Schleifkontakte. Zusätzlich werden je ein Takt von 256 Hz und 512 Hz mit Schleifkontakten auf die Welle übertragen, um die Meßwerterfassung (Sample and Hold, MUX, s. Bild 7.5) mit der Meßwertaufnahme durch den Digitalrechner zu synchronisieren. Die Stromversorgung wird auf der rotierenden Welle noch aufbereitet und geglättet.

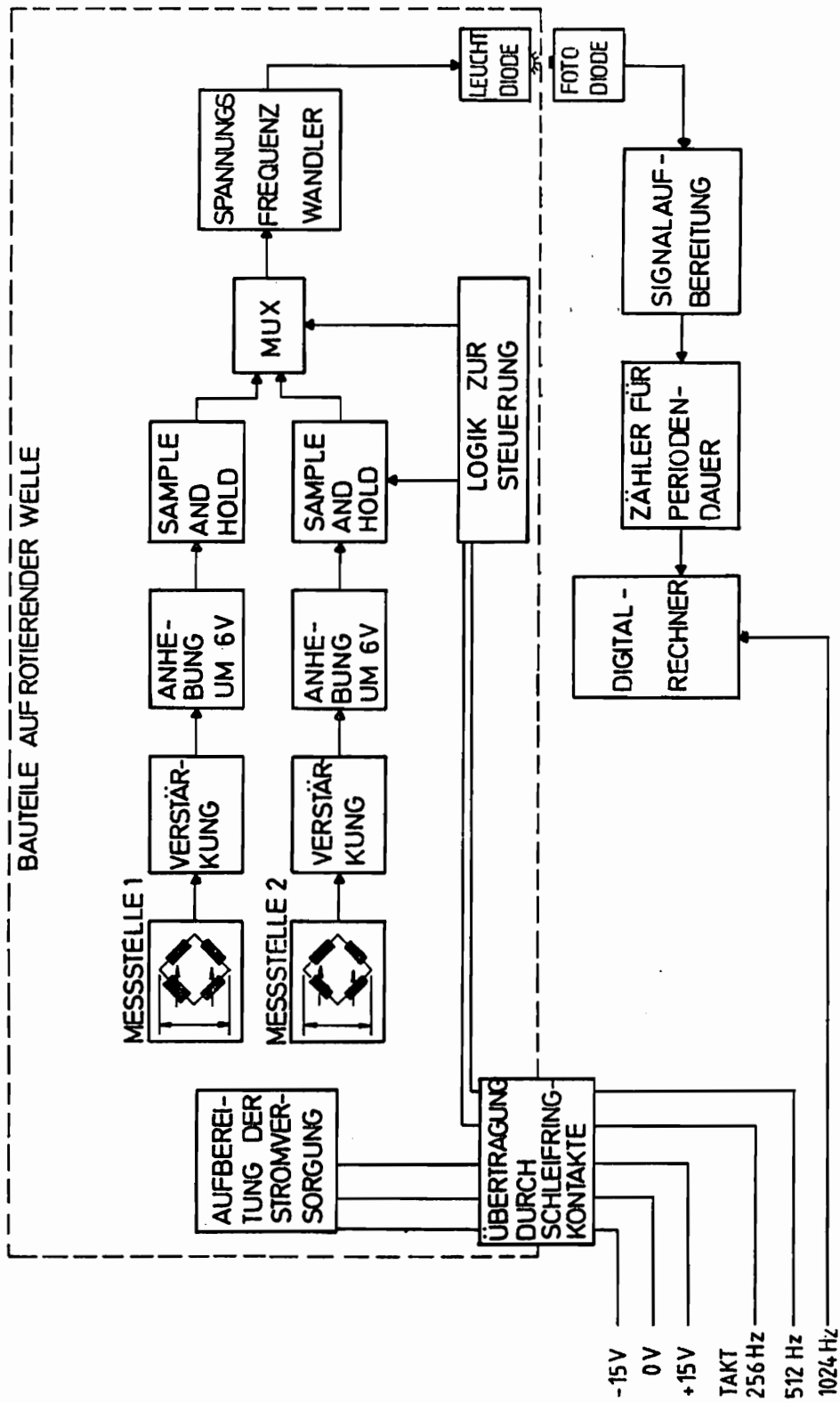


Bild 7.5 Erfassung und Übertragung der Meßwerte des Torsionsversuchsstandes

Der stehende Teil der Meßwertfassung beginnt mit einer Fotodiode, die die Signale der Leuchtdiode empfängt. Diese Signale werden zunächst aufbereitet, so daß die Frequenzen wieder durch Rechtecksignale mit einer Amplitude von 5V dargestellt werden. Die Frequenz wird dadurch ermittelt, daß der reziproke Wert, d.h. die Periodendauer, gemessen wird. Das geschieht mit einem schnellen Quarz, (10 MHz) dessen Impulse während einer oder mehrerer Perioden digital gezählt werden.

Man erhält so Werte, die direkt über eine Parallelkarte vom Digitalrechner eingelesen werden können. Der Digitalrechner wird mit 1024 Hz getaktet, so daß man pro Zeitschritt der Messung 4 Werte erhält. Zwei sind die gesuchten Meßwerte von Eingangs- und Schwingungssignal, die zwei anderen sind unsinnige Werte, die in der Zeit übermittelt werden, die die "Sample and Hold" Bausteine benötigen, um neue Meßwerte aufzunehmen. Versuche, die Frequenzen der Fotodiode mit einem Frequenz-Spannungs-Wandler oder Phase-Locked-Loop (PLL) in analoge Spannungen zurückzuverwandeln scheiterten, da diese Bauteile nicht schnell genug waren, um bei einem Frequenzbereich zwischen 20 kHz und 100 kHz ein Nutzsignal von rechteckiger Form, das sich mit einer Frequenz von 1024 Hz ändert, aufzufinden.

Mit dem Digitalrechner müssen die ankommenden Daten noch in Werte umgerechnet werden, die den Spannungen am Beginn der Meßwertübertragung entsprechen. Hierfür wird zunächst der Kehrwert des ankommenden Zahlenwertes genommen. Wegen einer leichten Nichtlinearität des Spannungs-Frequenz-Wandlers sind diese Werte noch nicht proportional den Spannungen. Aus diesem Grund wurde eine Meßreihe aufgenommen, bei der an dem Eingang des Spannungs-Frequenz-Wandlers Spannungen U zwischen 2 V und 10 V angelegt und die an den Rechner übergebenen Zahlenwerte Z bestimmt wurden. Es wurde dann ein Ausgleichspolynom 2. Grades durch die Beziehung $Y = 1/Z = f(U)$ gelegt. Die Gleichung

$$Y = \frac{1}{Z} = p_2 U[V]^2 + p_1 U[V] + p_0$$

läßt sich dann leicht nach $U[V]=f(Z)$ auflösen.

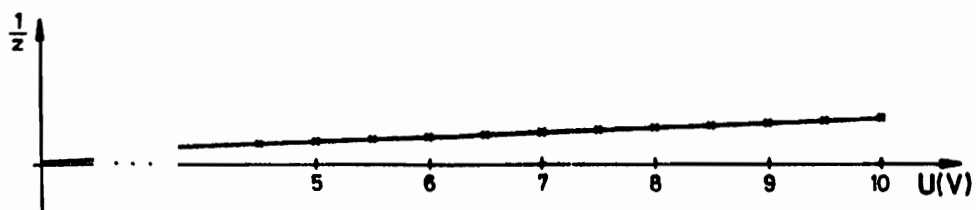


Bild 7.6 Ausgleichspolynom durch die Meßreihe zur Meßwertübertragung

Mit dieser Ausgleichsrechnung hat man ein relativ genaues Meßsystem, um mehrere Meßwerte auf einer rotierenden Welle gleichzeitig zu messen und nacheinander auf die stehende Meßwertverarbeitung zu übertragen. Es ist so möglich, den bei der Schwingungsmessung auftretenden schnellen Meßwertänderungen zu folgen. Wenn die Meßwerte sowieso mit dem Digitalrechner weiterverarbeitet werden sollen, hat man so eine preiswerte und genaue Möglichkeit zur Übertragung von Meßwerten von einer rotierenden Welle auf eine stehende Apparatur zur Meßwertverarbeitung.

7.3 Modellierung der Torsionswelle

Zur Berechnung der Torsionsschwingungen der rotierenden Welle wurde das in Bild 7.7 dargestellte Rechenmodell verwendet.

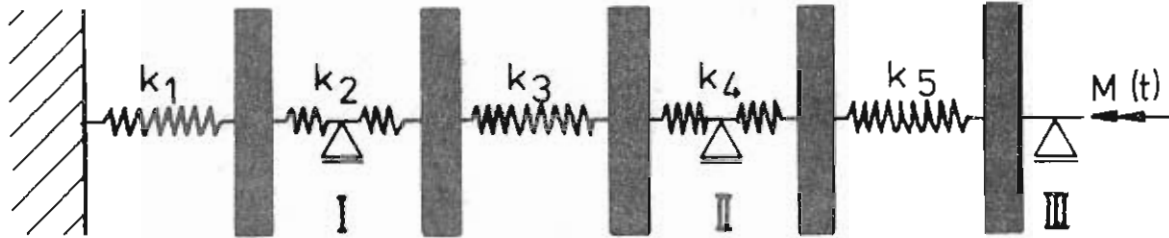


Bild 7.7 Rechenmodell für Torsionsschwingungen

Wegen der sehr weichen Koppelung zwischen Motor und 1. Schwungscheibe (Steifigkeit sehr klein), ist die Anregung von Torsionsschwingungen durch den Elektromotor vernachlässigt worden. Die Massenträgheitsmomente der Welle sind im Vergleich zu denen der Schwungscheibe sehr klein und deshalb ebenfalls zu vernachlässigen. Man erhält so lumped-mass-model mit punktförmigen Trägheiten an den Knotenpunkten und masselosen Federn zwischen den Scheiben.

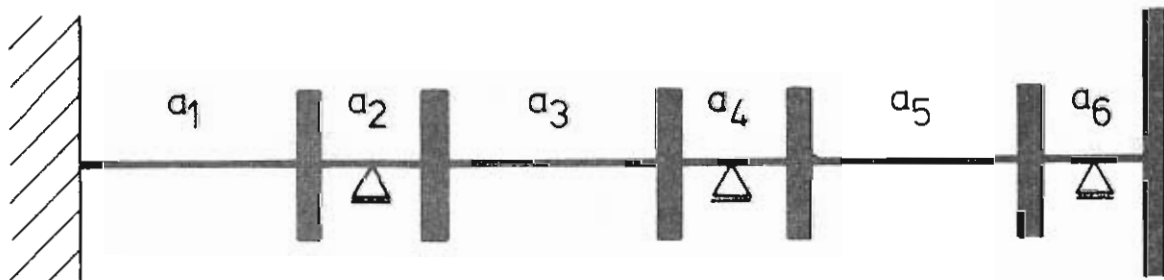


Bild 7.8 Zuordnung der Korrekturfaktoren zu den Wellenstücken

7.4 Messung von Eigenfrequenzen und Dämpfungen aus freien Torsionsschwingungen

Um für den Beobachterentwurf ein möglichst gutes Rechenmodell des Torsionsversuchsstandes zu erhalten, wurden die Eigenfrequenzen und Dämpfungen aus freien Torsionsschwingungen direkt gemessen und die Steifigkeitsmatrix an diese Meßwerte angepaßt. Bei der Betrachtung der freien Schwingungen wird mit dem 6-Scheiben-Modell entsprechend Bild 7.8 gerechnet. Das 5-Scheiben-Modell, das für die erregten Schwingungen und für den Beobachterentwurf benötigt wird, ist daraus durch Weglassen der 6. Scheibe leicht zu gewinnen (s. Bild 7.7).

Für die Messungen der freien Schwingungen ist der Elektromotor durch eine feste Einspannung ersetzt worden. Zusätzlich zu den Dehnungsmeßstreifen wurden an der 1. und 2. Scheibe Beschleunigungsaufnehmer am äußersten Rand tangential angebracht (s. Bild 7.9).

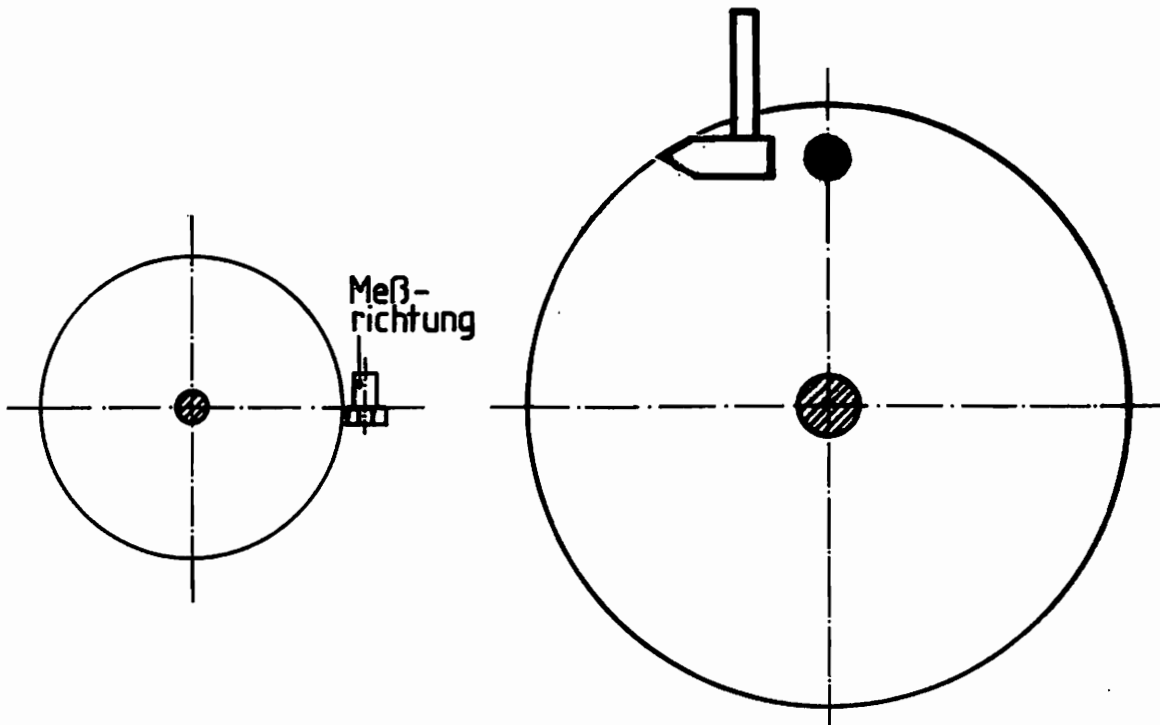


Bild 7.9 Messung und Anregung der Torsionsschwingungen

Die freien Torsionsschwingungen wurden, wie in Bild 7.9 gezeigt, jeweils durch einen Hammerschlag angeregt, die Zeitverläufe des Ausschwingvorgangs aufgezeichnet und die Meßsignale der Beschleunigungsaufnehmer und Dehnungsmeßstreifen ausgewertet. Mit dem in Anhang A1 beschriebenen Verfahren ergaben sich die in Tabelle 7.1 und 7.2 aufgeführten Eigenfrequenzen und Dämpfungen für die Versuchsaufbauten mit der Plexiglas- und der Aluminiumwelle. Wegen der großen Dämpfung und dem nichtlinearen Werkstoffverhalten der Plexiglaswelle traten hier recht große Streuungen auf (bei den Eigenfrequenzen ca. $\pm 3\%$).

	Eigenwert Nr.				
	1	2	3	4	5
Eigenfrequenz [Hz]	3	8.9	17.4	31.0	40.5
Dämpfung [1/sec]	10	12	13	12	13

Tabelle 7.1 Direkt identifizierte Eigenfrequenzen und Dämpfungen des Versuchsaufbaus mit der Plexiglaswelle (6-Scheiben-Modell)

	Eigenwert Nr.			
	1	2	3	4
Eigenfrequenz [Hz]	2.1	30.6	64.7	115
Dämpfung [1/sec]	9	8	8	7

Tabelle 7.2 Direkt identifizierte Eigenfrequenzen und Dämpfungen des Versuchsaufbaus mit der Aluminiumwelle (6-Scheiben-Modell)

Die Tatsache, daß sich die Dämpfungen der Versuchsaufbauten mit Plexiglas - und Aluminiumwelle nicht stark unterscheiden, deutet darauf hin, daß diese vorwiegend durch die Lager hervorgerufen werden.

Das Rechenmodell wurde nun an diese Eigenwerte angepaßt, wobei die Dämpfungsmatrix nach dem in Abschnitt 6.6.1 beschriebenen Verfahren bestimmt wurde. Es ergaben sich damit die in Tabelle 7.3 und 7.4 aufgeführten Eigenwerte des Rechenmodells.

	Eigenwert Nr.					
	1	2	3	4	5	6
Eigenfrequenz [Hz]	2.9	9.0	17.6	30.9	40.6	43.8
Dämpfung [1/sec]	5.3	12	13	15	16	18

Tabelle 7.3 Eigenfrequenzen und Dämpfungen des Rechenmodells des Versuchsaufbaus mit der Plexiglaswelle (6-Scheiben-Modell)

	Eigenwert Nr.					
	1	2	3	4	5	6
Eigenfrequenz [Hz]	2.1	30.6	64.7	115	146	159
Dämpfung [1/sec]	6.3	8	8	7	10	15

Tabelle 7.4 Eigenfrequenzen und Dämpfungen des Rechenmodells des Versuchsaufbaus mit der Aluminiumwelle (6-Scheiben-Modell)

7.5 Aufbereitung des Eingangssignals über eine Minimierung des Beobachtungsfehlers

Um Beobachtungsfehler zu vermeiden, die durch einen falschen Verstärkungsfaktor bei der Messung des Eingangssignals oder durch eine Verschiebung des Eingangssignals aus der Nullage entstehen, wurden sowohl der Verstärkungsfaktor als auch die Konstante der Verschiebung über eine Minimierung des Beobachtungsfehlers bestimmt. Eine derartige Bestimmung des Verstärkungsfaktors ist notwendig, da dieser wegen des einfachen Aufbaus der Brückenverstärker auf der rotierenden Welle nicht exakt zu bestimmen ist. Eine kleine konstante Verschiebung des Eingangssignals kann übrig bleiben, da die Meßsignale auf der Welle um 6 Volt angehoben und dann wieder rechnerisch abgesenkt werden. Die Bestimmung des Verstärkungsfaktors und der Konstanten ist in den Abschnitten 4.7 und 4.9 beschrieben. Das Verfahren ist numerisch stabiler, wenn im ersten Iterationsschritt nur der Verstärkungsfaktor optimiert wird und dann erst beide Werte gleichzeitig.

Die Verbesserung des Beobachters für den Versuchsaufbau mit der Plexiglaswelle durch die Anpassung des Verstärkungsfaktors (das Eingangssignal muß mit 2.45 multipliziert werden) ist deutlich an Bild 7.11 zu erkennen. Nach Optimierung der Konstanten (6% des Maximalwertes) ist noch einmal eine deutliche Verringerung des Beobachtungsfehlers festzustellen (s. Bild 7.12)

Durchgezogen : Beobachter
Gestrichelt (kurze Striche) : Meßwert
Gestrichelt (lange Striche) : Beobachtungsfehler
Anzahl der Zeitschritte : 256
Meßzeit : 1 sec

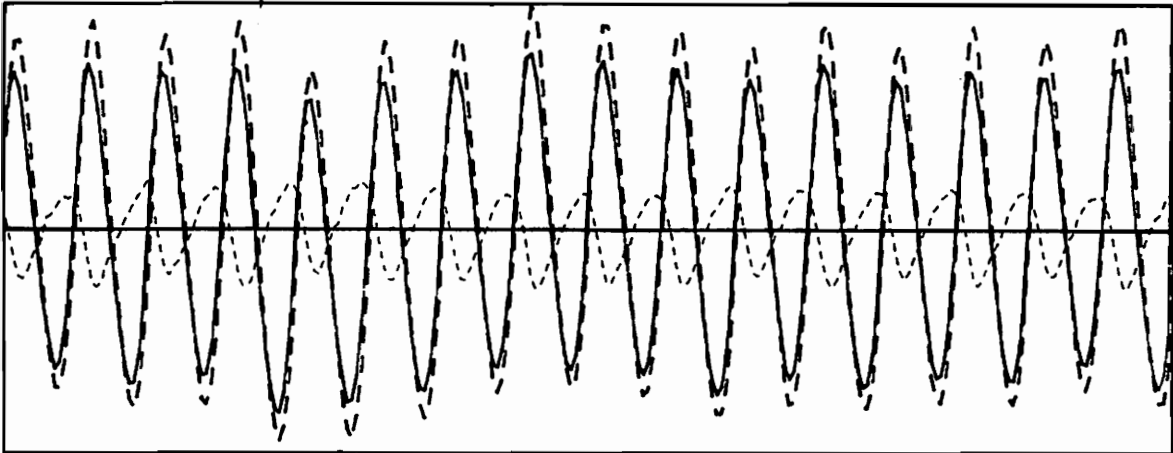


Bild 7.10 Beobachter für den Versuchsaufbau mit der Plexiglaswelle vor der Optimierung

Durchgezogen : Beobachter
Gestrichelt (kurze Striche) : Meßwert
Gestrichelt (lange Striche) : Beobachtungsfehler
Anzahl der Zeitschritte : 256
Meßzeit : 1 sec

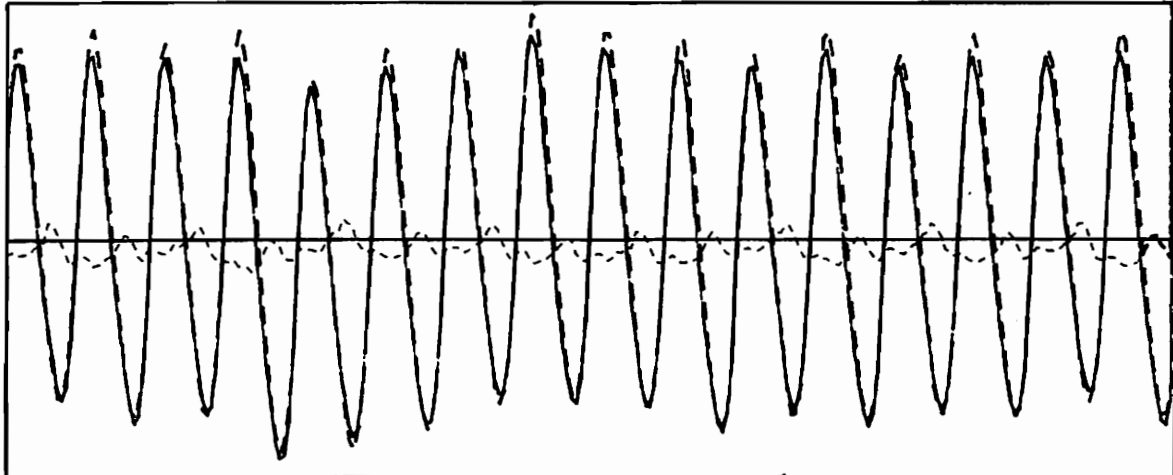


Bild 7.11 Beobachter nach Optimierung des Verstärkungsfaktors

Durchgezogen : Beobachter
Gestrichelt (kurze Striche) : Meßwert
Gestrichelt (lange Striche) : Beobachtungsfehler
Anzahl der Zeitschritte : 256
Meßzeit : 1 sec

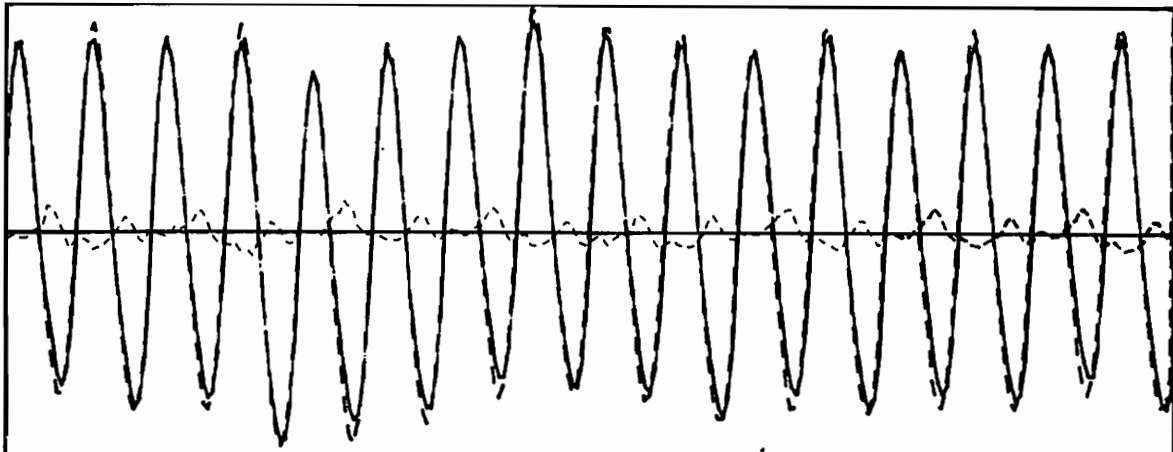


Bild 7.12 Beobachter nach Optimierung des Verstärkungsf. und der konstanten Verschiebung

7.6 Beobachter und Anpassung der Steifigkeitsmatrix für den Versuchsaufbau mit der Plexiglaswelle

Der Beobachterentwurf wurde nach dem Verfahren durchgeführt, bei dem sich die Eigenwerte der Beobachtermatrix F vorwählen lassen. Nach den bisher beschriebenen Vorarbeiten läßt sich mit einem Faktor von 0.98 der Eigenwerte von F gegenüber denen der Systemmatrix A ein brauchbarer Beobachter entwerfen (s. Bild 7.14). Die Anpassung der Eigenfrequenzen und damit der Steifigkeitsmatrix ist hier wesentlich schwieriger als bei dem Biegebalken. Die Anpassungsergebnisse bei den Rechenläufen für mehrere Messungen bei unterschiedlichen Drehzahlen der Welle liefen zwar in dieselbe Richtung, führten aber auf Werte, die relativ große Abweichungen aufwiesen. Die Ursache dafür liegt in dem nichtlinearen Werkstoffverhalten der Plexiglaswelle und darin, daß sich die Biegeschwingungen auch bei der gewählten Anordnung der Dehnungsmeßstreifen nicht vollständig kompensieren lassen. Sie sind nicht in dem Rechenmodell enthalten und führen als periodische Störungen zu Fehlern des Beobachters und bei der Parameteranpassung. Weiterhin werden Beobachtungsfehler von Torsionsschwingungen verursacht, die durch den Elektromotor angeregt werden. Da diese Anregung nicht gemessen wird, wurde versucht, sie durch eine weiche Kupplung klein zu halten.

Trotz dieser Probleme ist eine deutliche Verbesserung des Beobachters nach der Anpassung der Eigenfrequenzen und der Korrektur des modal transformierten Rechenmodells festzustellen (s. Bild 7.14 und 7.15). In Bild 7.13 ist der Zeitverlauf des Eingangssignals dargestellt.

Strichpunktiert : Eingangssignal

Anzahl der Zeitschritte : 256
Meßzeit : 1 sec

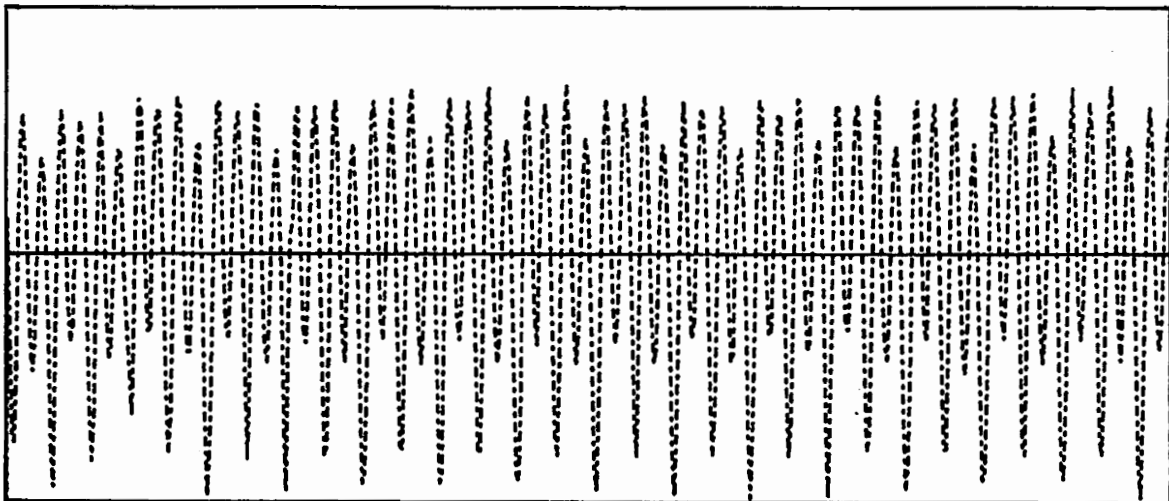


Bild 7.13 Eingangssignal

Durchgezogen : Beobachter
Gestrichelt (kurze Striche) : Meßwert
Gestrichelt (lange Striche) : Beobachtungsfehler

Anzahl der Zeitschritte : 256
Meßzeit : 1 sec

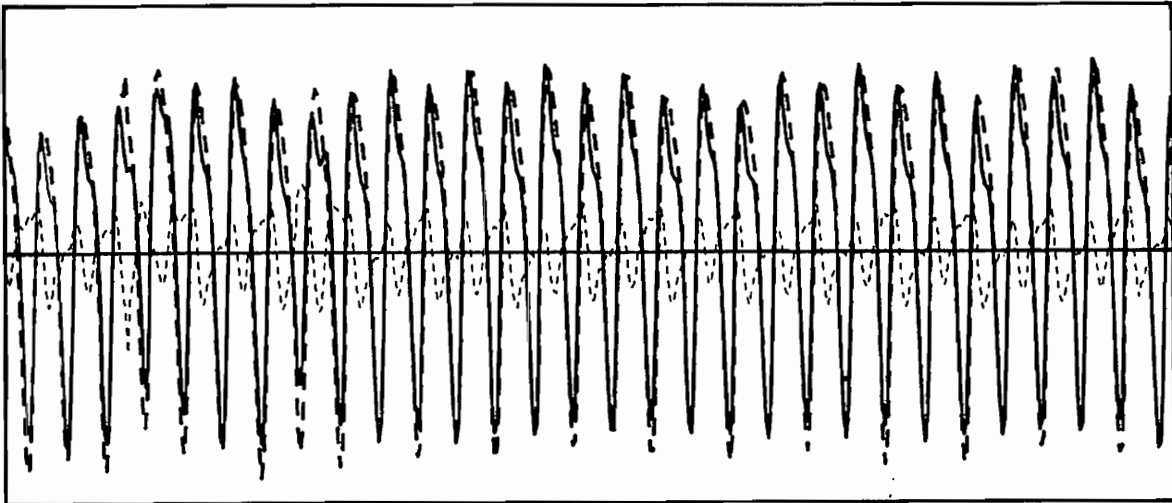


Bild 7.14 Beobachter für die Torsionswelle (Plexiglas) vor der Anpassung

Durchgezogen : Beobachter
Gestrichelt (kurze Striche) : Meßwert
Gestrichelt (lange Striche) : Beobachtungsfehler

Anzahl der Zeitschritte : 256
Meßzeit : 1 sec

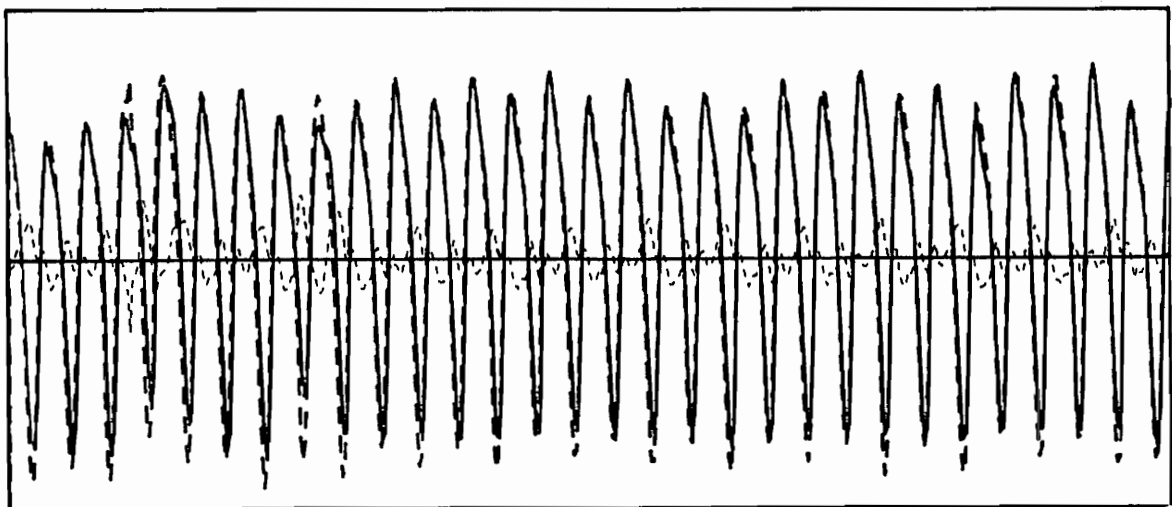


Bild 7.15 Beobachter für die Torsionswelle (Plexiglas) nach der Anpassung der Eigenfrequenzen

7.7 Beobachter und Schadenserkennung für den Versuchsaufbau mit der Aluminiumwelle

Bei den Versuchen mit der Aluminiumwelle sollte, wie schon bei dem eingespannten Balken, eine künstlich angebrachte Beschädigung der Welle durch eine Minimierung des Beobachtungsfehlers aufgefunden werden. Die Beschädigung besteht aus einer Reduzierung des Wellendurchmessers auf einer Länge von 25 mm zwischen der 2. und 3. Scheibe um 20%. Der Abstand zwischen 2. und 3. Scheibe beträgt 177 mm.

Als Kontrolle für die Anpassung der Eigenfrequenzen und der Korrekturparameter der Steifigkeitsmatrix mit dem Beobachter sind die Eigenfrequenzen des Versuchsaufbaus mit der beschädigten Welle zunächst auf direktem Wege identifiziert worden. Die Steifigkeitsmatrix wurde dann an diese Werte angepaßt, wobei die Zuordnung der Korrekturparameter zu den einzelnen Wellenstücken dem Bild 7.8 zu entnehmen ist. Es ergaben sich aus den Messungen die in Tabelle 7.5 aufgeführten Eigenfrequenzen und die angepaßten Korrekturparameter nach Tabelle 7.6. Die Verringerung der Wellensteifigkeit zwischen 2. und 3. Scheibe (a_3) ist deutlich festzustellen.

	Eigenfrequenz Nr.			
	1	2	3	4
Eigenfrequenz [Hz]	2.0	29.2	60.2	115

Tabelle 7.5 gemessene Eigenfrequenzen des Versuchsaufbaus mit der Aluminiumwelle (mit Beschädigung)

	angepaßter Korrekturparameter Nr.					
	1	2	3	4	5	6
Korrekturparameter	1.003	0.990	0.730	1.019	0.998	1.003

	angepaßte Eigenfrequenz Nr.			
	1	2	3	4
Eigenfrequenz [Hz]	2.0	29.2	60.2	115

Tabelle 7.6 An gemessene Eigenfrequenzen angepaßte Korrekturparameter und Eigenfrequenzen des Versuchsaufbaus mit der Aluminiumwelle (mit Beschädigung)

Die Eigenfrequenzen des 5-Scheiben-Rechenmodells, d.h. des Rechenmodells, mit dem der Beobachter entworfen wird, vor der Anpassung der Steifigkeitsmatrix ist in Tabelle 7.7 angegeben.

	Eigenfrequenz Nr.			
	1	2	3	4
Eigenfrequenz [Hz]	2.8	47.5	94.9	146

Tabelle 7.7 Eigenfrequenzen des 5-Scheiben-Rechenmodells (vor Anpassung)

Den Versuchsaufbau mit der Aluminiumwelle mit einem Beobachter zu überwachen bereitet Probleme, da die Eigenfrequenz von 47.5 Hz stark und die von 94.9 Hz noch deutlich angeregt wird, während die Abtastfrequenz auf maximal 256 Hz beschränkt ist. Das bedeutet, daß man nur 5 bzw. 2 bis 3 Meßwerte pro Schwingungsperiode erhält. In Verbindung mit den Meß- und Modellierungsungenauigkeiten, auf die schon hingewiesen wurde, ergibt dies eine ungünstige Voraussetzung für eine Parameteranpassung mit einem Beobachter. Es konnten deshalb nicht bei jedem Rechenlauf Parameter gefunden

werden, die den Beobachtungsfehler verringerten. Wenn jedoch Parameter bestimmt wurden, mit denen der Beobachter deutlich verbessert wurde, dann konnte damit auch der Schaden aufgefunden werden. Ein solcher Rechenlauf ist in Tabelle 7.8 und den Bildern 7.16 bis 7.18 dargestellt. Sowohl die Eigenfrequenzen als auch die Korrekturparameter stimmen gut mit den direkt identifizierten Werten überein. Die Verbesserung des Beobachters nach der Anpassung der Steifigkeitsmatrix ist deutlich zu sehen. Der Beobachter wurde für 4 Eigenschwingungen entworfen und nach dem indirekten Verfahren angepaßt.

1. Anpassung der Eigenfrequenzen					
Iterations- schritt	Eigenfrequenz Nr.				
	1	2	3	4	
0	2.96	46.63	94.86	144.6	
1	2.97	45.73	94.73	144.0	
2	2.97	44,80	94.51	143.6	
3	2.98	43.85	94.21	143.6	
1. Anpassung der Steifigkeitsmatrix an die verbesserten Eigenfrequenzen					
Lauf.Nr.	Korrekturparameter				
1	1.072	0.981	0.829	0.961	1.116
2	1.075	0.978	0.855	1.002	1.115
2. Anpassung der Eigenfrequenzen					
Iterations- schritt	Eigenfrequenz Nr.				
	1	2	3	4	
0	2.84	42.98	93.80	143.49	
1	2,83	42.15	93.37	143.43	
2	2.83	41.33	92.89	143.41	
1. Anpassung der Steifigkeitsmatrix an die verbesserten Eigenfrequenzen					
Lauf.Nr.	Korrekturparameter				
1	0.984	0.989	0.720	0.971	1.156
2	0.986	0.988	0.729	0.988	0.986

Tabelle 7.8 Indirekte Anpassung der Steifigkeitsmatrix über die Minimierung des Beobachtungsfehlers

Strichpunktirt : Eingangssignal

Anzahl der Zeitschritte : 256
Meßzeit : 1 sec

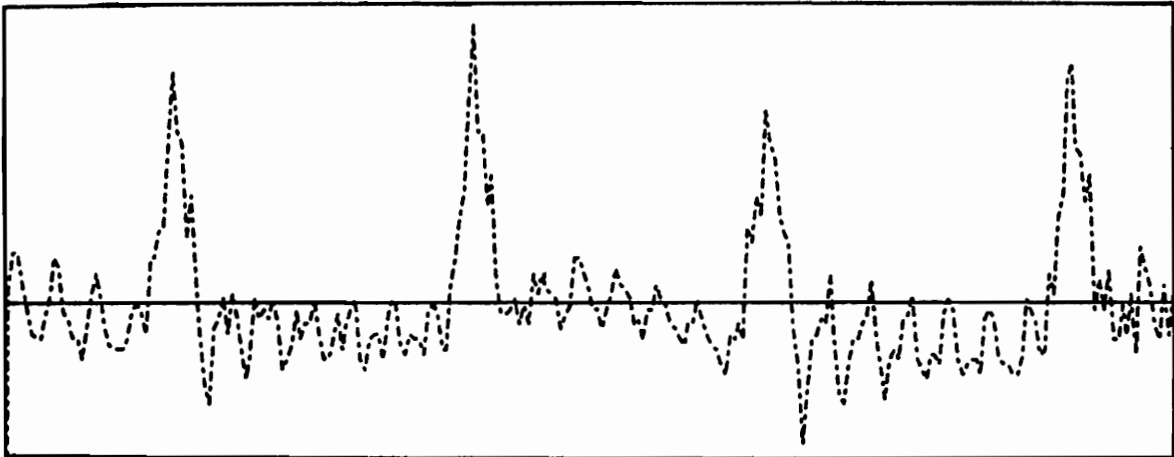


Bild 7.16 Eingangssignal

Durchgezogen : Beobachter
Gestrichelt (kurze Striche) : Meßwert
Gestrichelt (lange Striche) : Beobachtungsfehler

Anzahl der Zeitschritte : 256
Meßzeit : 1 sec

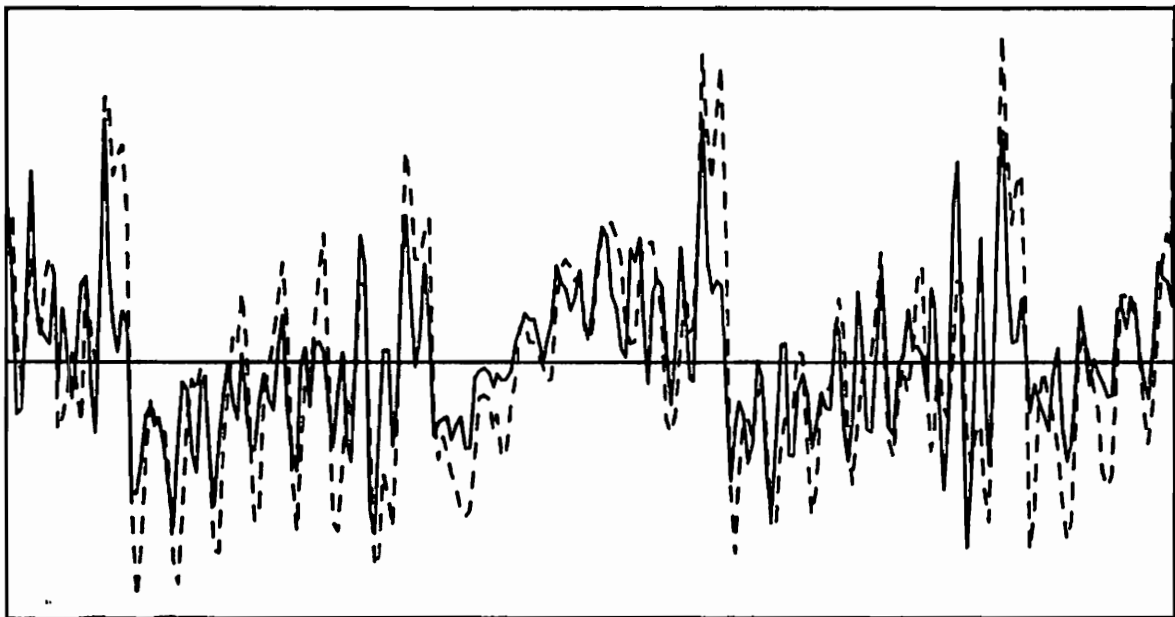


Bild 7.17 Beobachter für die Torsionswelle (Aluminium) vor der Anpassung

Durchgezogen : Beobachter
Gestrichelt (kurze Striche) : Meßwert
Gestrichelt (lange Striche) : Beobachtungsfehler

Anzahl der Zeitschritte : 256
Meßzeit : 1 sec

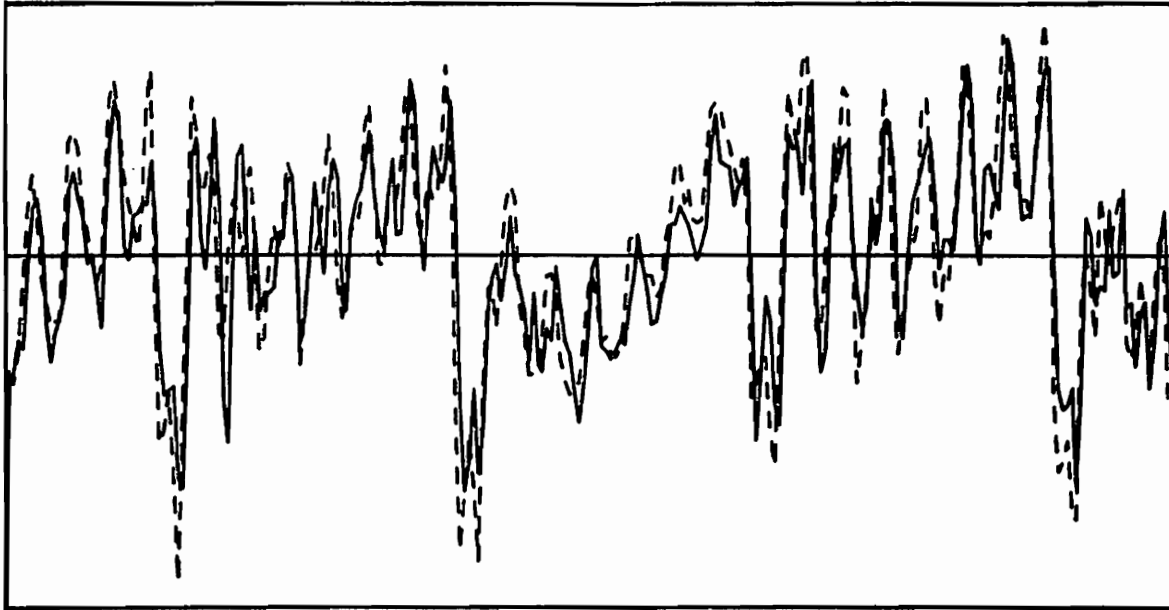


Bild 7.18 Beobachter für die Torsionswelle (Aluminium) nach der Anpassung

8. Erstellung des Rechenmodells eines Turboblocks als Grundlage für den Entwurf eines "modalen Beobachters"

8.1 Allgemeines

Um unnötige Wartungsarbeiten und größere Schäden zu vermeiden, ist die Überwachung des Schwingungsverhaltens von Großmaschinen ein Gebiet, das gerade im Hinblick auf eine Schadensfrüherkennung große Beachtung findet (s. /65/ bis /77/). Speziell zur Beschreibung des Schwingungsverhaltens einer Welle mit Riß sind zahlreiche Arbeiten in der Literatur zu finden (/65/, /78/ bis /80/). Als Ausblick werden in diesem Abschnitt Überlegungen und Vorarbeiten zum Entwurf eines Beobachters für den Turboblock eines Kraftwerks geschildert, mit dem eine Schwingungsüberwachung durchgeführt werden kann. Geht man davon aus, daß bis zur Betriebsdrehzahl von 50 Hz bei zweidimensionaler Rechnung die ersten 4 - 6, bei dreidimensionaler Rechnung die ersten 8 - 12 Eigenfrequenzen angeregt werden, dann muß der Einsatz eines "modalen Beobachters" zumindest für eine Ebene möglich sein.

Wichtig für den Entwurf eines solchen Beobachters ist ein möglichst kleines Rechenmodell, das aber das Schwingungsverhalten der Maschine besonders bezüglich der Eigenschwingungen ausreichend genau beschreibt. An zwei unterschiedlichen Turboblöcken wurde untersucht, ob die Erstellung eines Rechenmodells, das diese Forderungen erfüllt, möglich ist.

Es wird gezeigt, wie mit den Mitteln der Systemidentifikation ein Rechenmodell durch Meßergebnisse verbessert werden kann. An zwei unterschiedlichen Turboblöcken (150 MW und 740 MW Leistung) wurden die Lagerschwingungen während des Auslaufs gemessen und die Resonanzstellen festgestellt. Für jeden Turboblock wurde dann ein Rechenmodell erstellt, und die damit berechneten Eigenfrequenzen sind dann mit den aus den Messungen gewonnenen Werten verglichen worden. Durch eine Minimierung der bei dem Vergleich festgestellten Abweichungen wurden die Rechenmodelle anschließend verbessert. Vereinfachungen, die bei der Modellbildung unvermeidlich sind, sollten durch eine Anpassung an die Ergebnisse der Messungen ausgeglichen werden.

Während bei der 150 MW Turbine gute Ergebnisse erzielt wurden und auch gezeigt werden konnte, wie derartige Identifikationsverfahren zur Schadensfrüherkennung genutzt werden können, ergaben sich bei dem komplizierter gebauten 740 MW Turboblock erhebliche Schwierigkeiten. Aus diesem Grund wurden grundlegende Untersuchungen zur Identifikation und Modellierung von Wellensträngen mit großen und häufigen Durchmesseränderungen durchgeführt. Zunächst werden die Versuche an dem 150 MW Turboblock beschrieben und dann die Modellierung und Identifikation des 740 MW Blocks, wobei auf die erheblichen Unterschiede dieser beiden Probleme eingegangen wird und abschließend wird gezeigt, wie die Probleme bei der Identifikation großer Turbinen gelöst werden können.

8.2 Erstellen des Rechenmodells für den 150 MW Turboblock

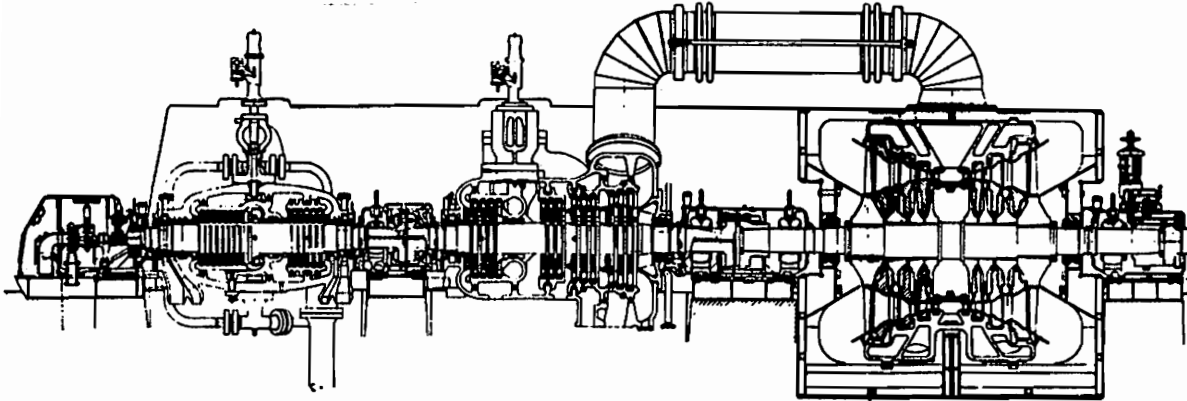


Bild 8.1 150 MW Turbine

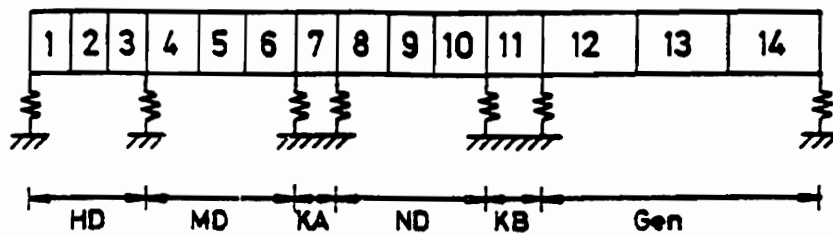


Bild 8.2 Rechenmodell des Turboblocks

Die 150 MW - Turbine besteht aus Hochdruck- (HD), Mitteldruck- (MD) und Niederdruckteil (ND), die über Kupplungselemente (KA und KB) fest miteinander verschraubt sind (s. Bild8.1). An den Niederdruckteil schließen sich noch der Generator und der Erreger (Gen) an. Modelliert wurde der komplette Turbosatz. Das Gewicht der Welle einschließlich Turbinenschaufeln, Kupplungen und sonstigen mitrotierenden Teilen beträgt laut Herstellerangaben 82 t. Entsprechend der Netzfrequenz des erzeugten Stroms beträgt die Betriebsdrehzahl $3000 \frac{U}{min}$, das sind 50 Hz. Außer den Längsschnitten durch Turbine und Generator standen an Herstellerdaten die kritischen Einzeldrehzahlen und die Massen der Bauelemente zur Verfügung. Bei der Erstellung des Rechenmodells der Turbine wurde folgendermaßen vorgegangen:

Die Wellendurchmesser sind innerhalb der einzelnen Baugruppen mehrfach abgestuft. Die exakte Massenverteilung über die Länge ist aus den Unterlagen nicht erkennbar. Daher sind für das Rechenmodell Vereinfachungen zu treffen. Eine genaue Modellierung abgesetzter Wellen, wie sie z.B. für die Berechnung von Maximalspannungen im Bereich der Durchmesserprünge benötigt wird, ist in /81/ bis /83/ zu finden. Hier soll von konstanten Massen- und Steifigkeitsverteilungen für die einzelnen Baugruppen ausgegangen werden. Die Massenverteilung wurde so gewählt, daß sie mit den Massenangaben des Herstellers übereinstimmt. Der mittlere Wellendurchmesser einer Baugruppe wurde so bestimmt, daß die 1. Eigenfrequenz gleich der kritischen Drehzahl nach Herstellerangaben ist. Für die Kupplungsbereiche wurden die Wellendurchmesser der Zeichnung entnommen. Die Daten, die dem Rechenmodell zugrunde liegen, sind in Tabelle 8.1 aufgeführt.

Baugruppe	krit. Drehzahl [1/ min]	Frequenz f [Hz]	Masse m [kg]	Länge L [m]	Radius [m]	Trägheits- moment [10 ⁻³ m ⁴]
HD	3146	52,4	4620	3,71	0,200	1,250
MD	1446	24,1	9820	4,97	0,204	1,347
KA	—	—	2390	1,35	0,175	0,737
ND	1088	18,2	24080	4,92	0,219	1,820
KB	—	—	2460	1,71	0,185	0,920
Gen	1213	20,2	38830	8,10	0,379	16,277

Tabelle 8.1 Daten des Rechenmodells nach Herstellerangaben

Als Rechenmodell wurde ein consistent - mass - modell verwendet, wobei der Turbosatz in 14 Elemente (Bild 8.2) unterteilt wurde. Für die Elemente wurden die allgemein üblichen Steifigkeits- und Massenmatrizen verwendet. Es entstand ein Modell mit 30 Freiheitsgraden. Die Anzahl von 14 Elementen ergab sich, wie Testrechnungen zeigten, als guter Kompromiß zwischen der Genauigkeit der Modellierung und der Rechenzeit. Wegen des Ziels, ein möglichst kleines Rechenmodell zu erstellen, aber auch aus Gründen der Rechenzeit und des Speicherplatzbedarfs waren gerade bei der Abschätzung der Lagersteifigkeiten noch weitere Vereinfachungen notwendig. So wurde in dieser ersten Studie auf eine dreidimensionale Beschreibung verzichtet und nur die vertikale Ebene betrachtet. Es wurde versucht, mit Hilfe der in Abschnitt 3.5 beschriebenen Identifikation für jedes Lager eine mittlere Federsteifigkeit zu finden. Zunächst wurden die Lagersteifigkeiten und Lagerdämpfungen für die Betriebsdrehzahl von 50 Hz für die vertikale Ebene nach Glienecke bestimmt. Es ergaben sich folgende Werte :

Lager	1	2	3	4	5	6	7
Steifigkeit [10 ⁹ kN · m ⁻¹]	170	1090	140	2040	1290	2400	2190
Dämpfung [10 ³ kN · s · m ⁻¹]	2.5	3.5	3.8	4.3	4.1	5.6	5.6

Tabelle 8.2 Lagerdaten

Nach Einbau dieser Lagersteifigkeiten in das Finite-Element-Modell der Welle ergab sich :

Eigen - Frequenzen [Hz]			
Nr.	ohne Dämpfung	mit Dämpfung	starre Lagerung
1	20.02	20.14	21.77
2	21.41	23.44	28.25
3	26.09	31.38	36.18
4	45.29	63.36	69.23
5	66.48	73.40	91.25
6	67.91	73.78	99.23
7	68.48	78.86	138.51

Tabelle 8.3 Eigenfrequenzen des Rechenmodells nach a-priori-Kenntnissen

Vernachlässigt wurden bei dieser Modellbildung die speziellen Eigenschaften der Gleitlager, die Werkstoffdämpfung, deren Einfluß gering ist, die Kreiselwirkung, deren Einfluß ebenfalls gering ist und die Lagerdämpfung, deren Einfluß schon erheblich ist, wie Kontrollrechnungen zeigen (s. Tabelle 8.3). Sie verursacht eine Verschiebung der Eigenfrequenzen in Richtung starre Lagerung. Es ist abzuwägen, ob die Lagerdämpfungen berücksichtigt werden sollen und damit eine erhebliche Vergrößerung des Speicherplatzbedarfs und der Rechenzeit in Kauf genommen wird, oder ob, wie hier, versucht wird, auf dem Wege der Parameteranpassung den Einfluß der Dämpfung auf die Eigenfrequenzen durch größere Federsteifigkeiten auszugleichen.

8.3 Messung und Bestimmung der Resonanzfrequenzen

Die Turbine ist an den Lagern I, II, IV mit je zwei im Winkel von 90° festinstallierten Meßaufnehmern ausgestattet. Es handelt sich um induktive Wegaufnehmer zur berührungslosen Messung der Bewegung der Welle relativ zum Lager. Diese relativen Lagerschwingungen wurden mehrmals nach dem Abschalten der Turbine während des Auslaufs auf ein Magnetbandgerät analog aufgezeichnet.

Zur Ermittlung des Frequenzgangs und damit der kritischen Drehzahlen wurden an jeder der 6 Meßstellen mehrmals kurze Ausschnitte des Zeitsignals mit Hilfe der Fast-Fourier-Transformation in den Frequenzbereich transformiert. Anschließend wurden von der Drehzahlfrequenz und deren Vielfachen Amplitude und Phase bestimmt. Diese Art der Auswertung hat folgende Vorteile:

1. Man erhält wirklich die zur Drehzahlfrequenz gehörende Schwingungsamplitude und nicht zusätzlich die der Vielfachen, die auch einen erheblichen Anteil an der Schwingungsamplitude ausmachen können.
2. Es ist möglich, falls die Messungen gut genug sind, die Phasenverschiebungen der verschiedenen Lagerschwingungen zueinander festzustellen.
3. Es ist möglich, den Frequenzgang der doppelten Drehfrequenz zu bestimmen. Auch hier treten Resonanzstellen auf.

Bei dieser Untersuchung wurden nur die drehzahlfrequenten Schwingungen zur Auswertung herangezogen. Diese werden vorwiegend durch Unwuchtkräfte erregt, die mit dem Quadrat der Drehzahl zunehmen. Deshalb wurden die Amplituden so normiert, daß durch das Quadrat der Drehzahlfrequenz geteilt wurde.

Es ergaben sich Frequenzgänge wie in Bild 8.3 und 8.4 gezeigt und die in Tabelle 8.4 aufgeführten Eigenfrequenzen.

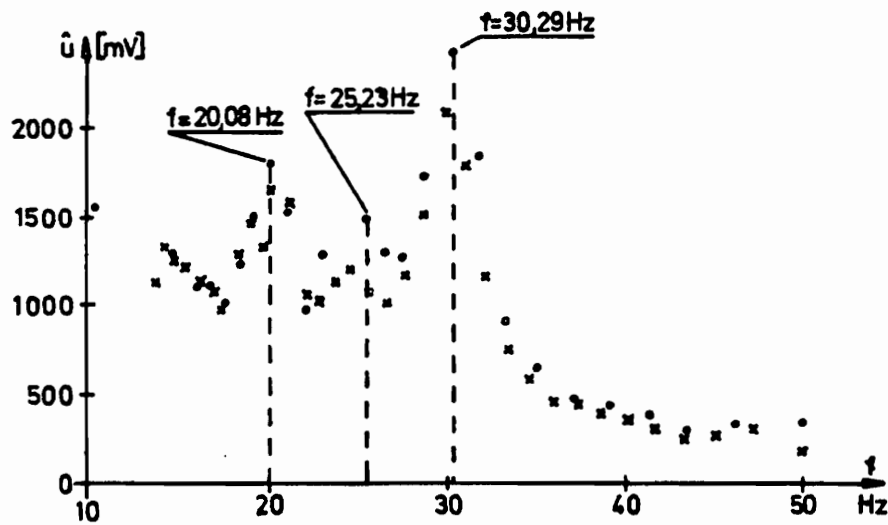


Bild 8.3 Lager II, Meßebene II

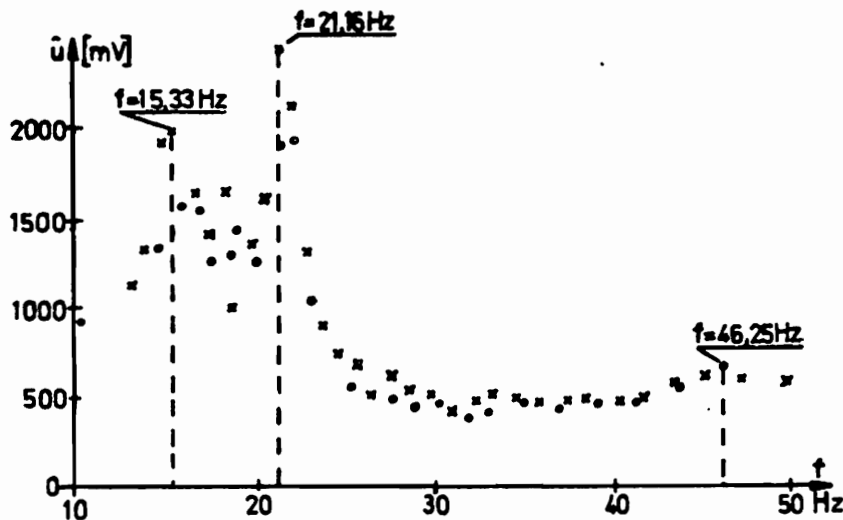


Bild 8.4 Lager IV, Meßebene II

8.4. Anpassung des Rechenmodells an die Meßwerte

Die Anpassung eines Rechenmodells an gemessenen Eigenfrequenzen ist in Abschnitt 3.5 beschrieben. Bei der Durchführung dieser Parameteranpassung ergaben sich Schwierigkeiten bei der Zuordnung der gemessenen Eigenfrequenzen zu den berechneten. Eine sichere Zuordnung wäre nur über einen Vergleich der Eigenformen zu erreichen, hierfür wäre auch die Bestimmung der Phasenverschiebungen der Schwingungen an den verschiedenen Meßstellen sehr hilfreich. Ein Vergleich der Eigenformen war bei dieser Untersuchung wegen zu wenig Meßinformation nicht möglich. Es wurden deshalb mehrere Rechenversuche mit unterschiedlichen Zuordnungen durchgeführt.

m	Versuch a		Versuch b		Versuch c	
	f [Hz] mess	f [Hz] rech	f [Hz] mess	f [Hz] rech	f [Hz] mess	f [Hz] rech
1	20,1	19,98	15,3	15,32	15,3	15,30
2	21,5	21,47	20,6	20,62	20,1	20,10
3	25,2	24,97	25,2	25,15	21,1	21,08
4	30,3	30,27	30,3	30,31	30,3	30,31
5	46,2	46,39	46,2	46,14	46,2	46,25

Tabelle 8.4 Rechenergebnisse

Die besten Ergebnisse und die schnellste Konvergenz der Iteration ergab sich aus Rechenversuch c. Es konnte auch eine gewisse Übereinstimmung bei den Eigenformen festgestellt werden. Es ergaben sich folgende Steifigkeitsparameter :

I	Parameter a(i)	Bauteil	Ausgangsmodell	korrig. Modell
Steifigkeit in 10^3 kN/m				
1	0,6246	Lager I	170	106
2	0,1291	Lager II	1190	141
3	0,9897	Lager III	140	139
4	0,7591	Lager IV	2040	1549
5	0,0431	Lager V	1290	56
6	1,0156	Lager VI	2400	2437
7	1,0819	Lager VI	2190	2367
Trägheitsmoment in 10^{-3} m ⁴				
8	0,9834	HD	1,250	1,230
9	0,9880	MD	1,347	1,331
10	1,0000	KA	0,736	0,736
11	0,9104	ND	1,820	1,675
12	0,9930	KB	0,920	0,914
13	1,1120	Gen	16,277	18,100

Tabelle 8.5 korrigiertes Rechenmodell

Das Ausgangsmodell wurde mit $a(i) = 1$ gebildet. Die geringe Änderung der Wellensteifigkeiten liegt an der großen Wichtung der Abweichung von den Ausgangsparametern.

8.5 Modellierung und Identifikation des 740 MW Turbosatzes

Angeregt durch die guten und gut interpretierbaren Anpassungsergebnisse bei dem 150 MW Turbosatz wurde eine entsprechende Identifikation an einer 740 MW Turbine durchgeführt (/85/). Da die Anpassungsergebnisse der 150 MW Turbine wegen zu wenig Meßinformation nicht verifiziert werden konnten (alle Meßinformationen wurden zur Anpassung verwendet), wurde hier an allen acht Lagern gemessen. Außerdem wurde das Rechenmodell aufwendiger gestaltet, zum einen weil die größere Turbine

komplizierter aufgebaut ist, zum anderen wurden hier die speziellen Eigenschaften der Gleitlager und die Querriegel des Lagerfundamentes berücksichtigt.

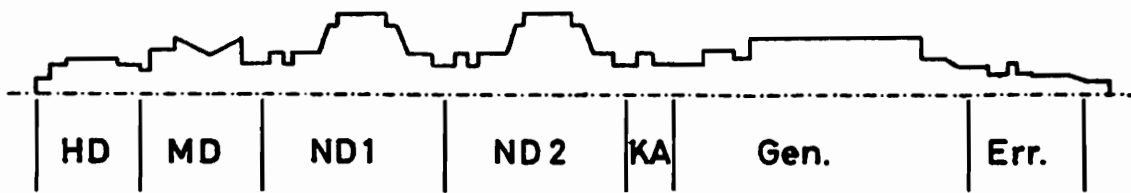


Bild 8.5 Wellenstrang des 740 MW Turbosatzes

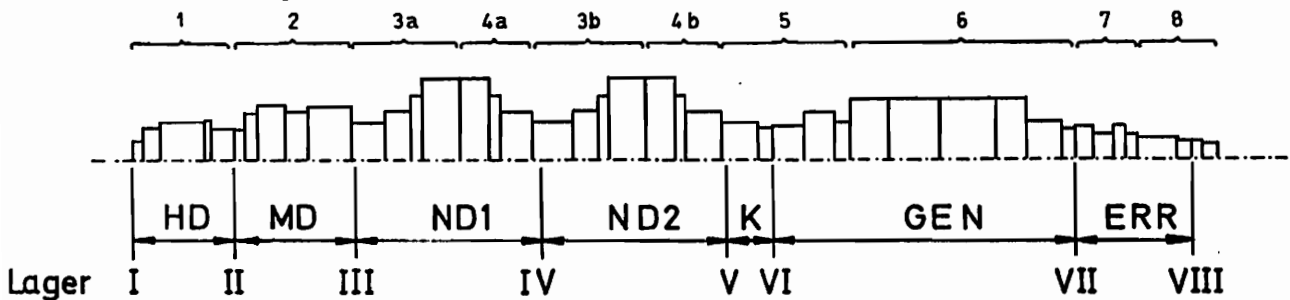


Bild 8.6 Rechenmodell (44 Elemente) des 740 MW Turbosatzes

Nr.	ω/s^{-1}	$\hat{\omega}/s^{-1}$	ω^*/s^{-1}	a
1	83,04	80,45	82,71	0,9519
2	196,77	200,2	195,1	0,7003
3	201,90	225,2	197,9	0,6504
4	245,46	278,9	248,6	1,237
5	273,21	292,1	275,4	0,7481
6	407,57	441,6	404,0	1,295
7	485,38	507,6	489,9	1,028
8	497,00	565,4	501,9	0,8051

ω : Eigenfrequenz mit 240 Elementen gerechnet
 $\hat{\omega}$: Eigenfrequenz mit 44 Elementen vor Anpassung
 ω^* : Eigenfrequenz mit 44 Elementen nach Anpassung

Tabelle 8.6 Anpassung des groben Rechenmodells an das feine

Der Wellenstrang wurde so modelliert, daß zunächst ein Rechenmodell mit einer groben Elemententeilung (44 Elemente) an ein feineres Rechenmodell (240 Elemente), das jede Änderung des Wellendurchmessers berücksichtigt, angepaßt wurde. Die Rechnung wurde für einen starr gelagerten Rotor durchgeführt (s. Tabelle 8.6). Die Zuordnung der Korrekturparameter zu den Steifigkeiten einzelner Wellenstücke ist Bild 8.6 zu entnehmen. Die Querriegel des Fundaments, auf denen die Lager befestigt sind, wurden als zweifach gelenkig gelagerte Balken modelliert und dann auf eine Masse mit einer Feder reduziert. Die Werte sind in Tabelle 8.7 angegeben.

Querriegel - Nr.	l/m	B/m	H/m	J_{yy}/m	$c_Q/(N/m)$	m_Q/kg
1	10,20	1,13	3,50	4,04	$6,30 \cdot 10^9$	$5,14 \cdot 10^4$
2	10,35	0,97	3,05	2,29	$3,43 \cdot 10^9$	$3,90 \cdot 10^4$
3	9,00	1,175	8,05	2,78	$6,31 \cdot 10^9$	$4,11 \cdot 10^4$
4	8,80	1,10	3,43	3,70	$9,00 \cdot 10^9$	$4,23 \cdot 10^4$
5	7,00	1,175	3,20	3,21	$1,55 \cdot 10^9$	$3,35 \cdot 10^4$

Tabelle 8.7 Querriegel­daten

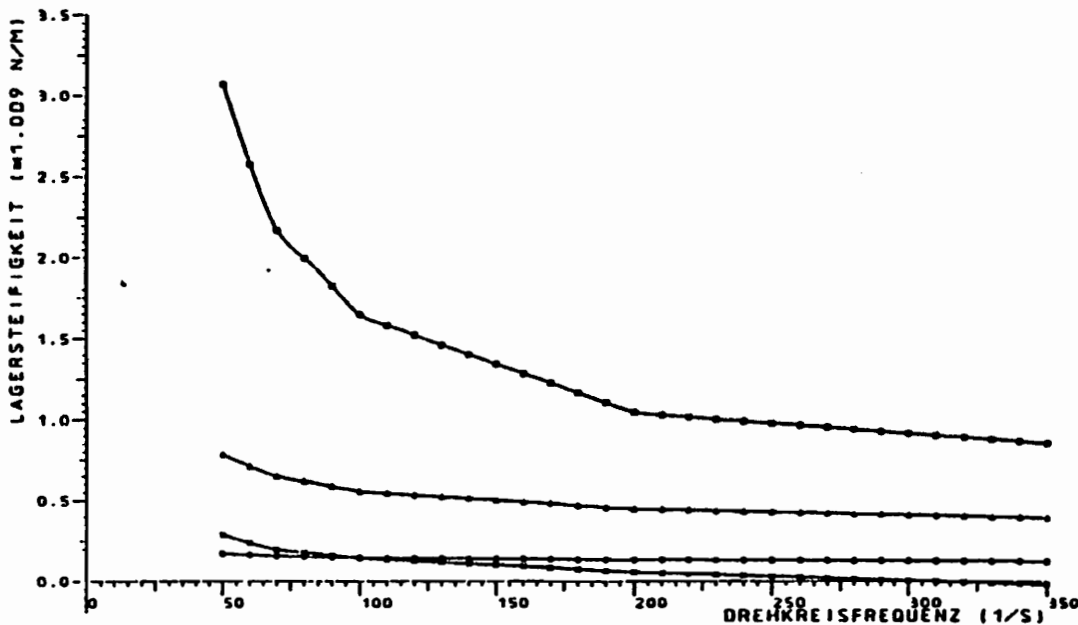


Bild 8.7 Steifigkeiten des 1. Gleitlagers

Durch den Einbau der Gleitlager ist das Rechenmodell hier wesentlich aufwendiger. Es gibt aber einige Eigenschaften des gleitgelagerten Rotors, die bei der Modellierung durch eine einfache Feder nicht berücksichtigt werden können:

- Aufspaltung der Eigenfrequenzen durch unterschiedliche Steifigkeiten in x- und y- Richtung
- Drehzahlabhängige Lagersteifigkeiten
- nichtkonservatives System durch unsymmetrische Steifigkeitsmatrix (über die Lager kann dem System Energie entzogen oder zugeführt werden)

Die Berücksichtigung der Gleitlager verursachte eine wesentliche Erhöhung der Rechenzeit. Wegen der Berechnung der x- und y- Ebene verdoppelt sich die Anzahl der Freiheitsgrade, wegen der Frequenzabhängigkeit der Gleitlagersteifigkeit muß bei der Parameteranpassung an die gemessenen Eigenfrequenzen das Eigenwertproblem für jede gemessene Eigenfrequenz neu gelöst werden (die Gleitlagersteifigkeiten wurden für die

jeweilige Resonanzdrehzahl neu berechnet) und wegen der Unsymmetrie der Steifigkeitsmatrix müssen neben den Rechtseigenvektoren r_i nach der Gleichung

$$(M \lambda_i^2 + K) r_i = 0$$

noch die Linkseigenvektoren l_i nach

$$l_i^T (M \lambda_i^2 + K) = 0^T \text{ bzw. } (M^T \lambda_i^2 + K^T) l_i = 0$$

berechnet werden, die Kreiselwirkung wurde auch hier vernachlässigt, da deren Einfluß auf die Eigenfrequenzen sehr gering ist, ebenso aus Speicherplatzgründen die Dämpfung.

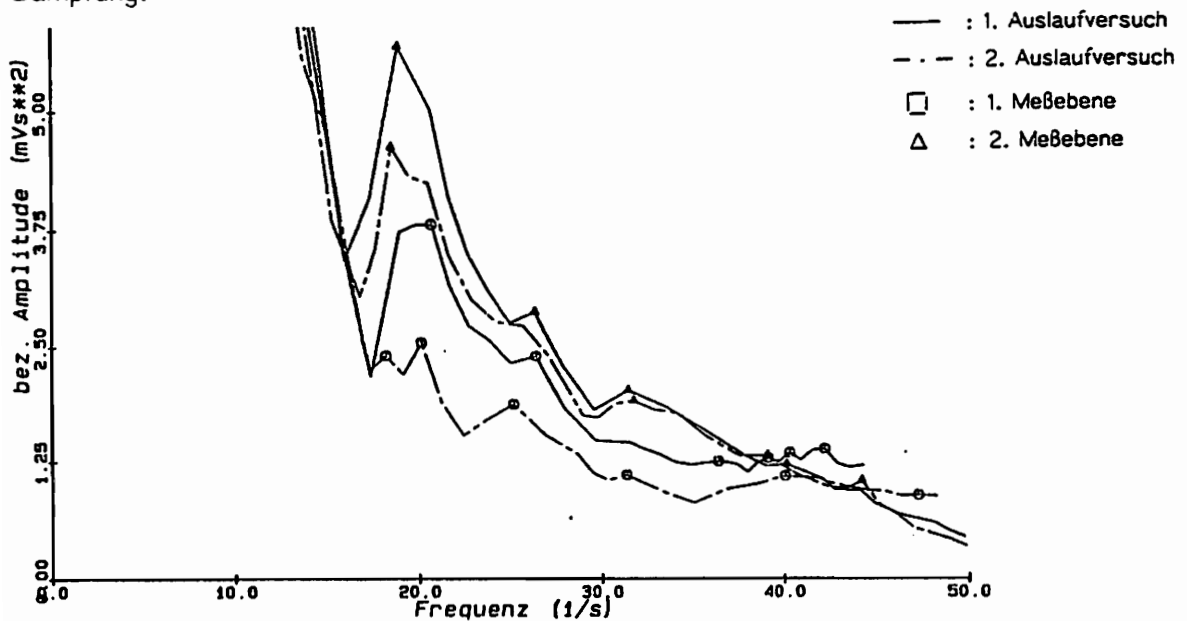


Bild 8.8 Normierte Amplituden der Relativschwingungen am Lager 1

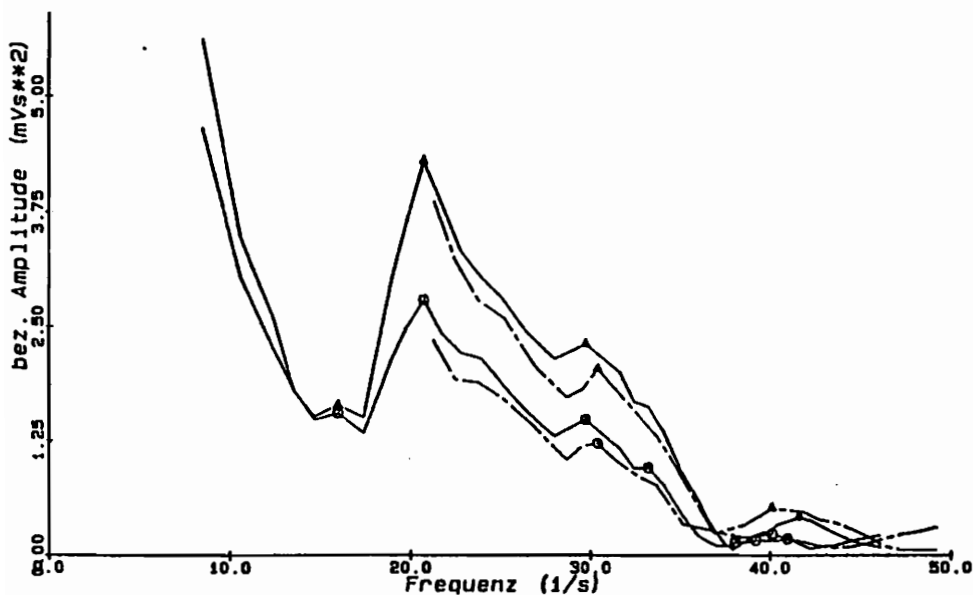


Bild 8.9 Normierte Amplituden der Relativschwingungen am Lager 6

Bei der Bestimmung der Resonanzstellen wurde genauso vorgegangen wie bei der 150 MW Turbine. Es wurde wieder während zweier Ausläufe gemessen, die eine gute Übereinstimmung brachten. Die gemessenen Frequenzgänge des 1. und 6. Lagers sind in den Bildern 8.8 und 8.9 dargestellt. Es wurden die in Tabelle 8.9 aufgeführten Resonanzstellen zur Auswertung herangezogen.

Die Parameteranpassung wurde durchgeführt, wie in Abschnitt 3.5 beschrieben ist. Es ist jedoch zu berücksichtigen, daß für die Ableitung des i-ten Residuums nach dem j-ten Korrekturparameter a_j wegen der durch die Gleitlager verursachte Unsymmetrie der Steifigkeitsmatrix gilt :

$$\frac{\partial v_i}{\partial a_j} = \frac{(\hat{\omega}_i - \omega_i)}{\partial a_j} = - \operatorname{Im} (I_i \mathbf{K}_j(\omega_i) \mathbf{r}_i)$$

\mathbf{K}_j : Submatrix des j - ten Parameters

Weiterhin wurde bei der Anpassung der Lagersteifigkeiten ein Korrekturfaktor gewählt, der proportional zur Ölzähigkeit μ ist, die neben der statischen Lagerlast die unsicherste Größe darstellt.

Die Anpassung führt auf folgende Werte :

Nr.	Vor Anpassung \hat{a}_j	Nach Anpassung a_j	
1	0,9519	1,0758	Wellensteifigkeit
2	0,7003	1,0060	
3	0,6504	0,4780	
4	1,237	1,3432	
5	0,7481	0,7258	
6	1,295	1,3528	
7	1,028	0,9162	
8	0,8051	0,9996	
9	1,0000	0,8214	Steifigkeit der Querriegel
10	1,0000	0,9774	
11	1,0000	1,1971	
12	1,0000	0,9750	
13	1,0000	1,0849	
14	1,0000	1,0189	Ölzähigkeit der Geitlager
15	1,0000	1,0379	
16	1,0000	0,9746	
17	—	—	
18	1,0000	0,9465	
19	1,0000	1,0208	
20	1,0000	1,1410	
21	—	—	

Tabelle 8.8 Werte der Startparameter und Korrekturparameter des verbesserten Rechenmodells

$\omega_{\text{mess}} \text{ [s}^{-1}\text{]}$	82.0	100.0	116.0	129.0	145.0	163.0	185.0	201.0	226.0	239.0	254.0	302,0
$\omega_{\text{rech}} \text{ [s}^{-1}\text{]}$	80.96	103.3	116.2	130.1	144.2	161.3	186.3	199.4	225.8	239.0	254.3	302.1

Tabelle 8.9 Gemessene und angepaßte Eigenkreisfrequenzen

Zum Abschluß dieses Abschnitts sollen die Unterschiede bei Modellierung und Identifikation des 150 MW und des 740 MW Turbosatzes zusammengefaßt werden.

- Der 150 MW Turbosatz wurde nur in einer Ebene modelliert und die Gleitlager wurden durch eine einfache Feder ersetzt. Man erhielt so ein kleines übersichtliches Rechenmodell. Für den 740 Turbosatz wurde ein dreidimensionales Rechenmodell erstellt, das die speziellen Gleitlagereigenschaften und das Fundament berücksichtigt. Es ergaben sich viele Unbekannte, die mit Korrekturparametern versehen werden mußten. Die Parameteroptimierung benötigte viel Rechenzeit, so daß nicht viele Rechenversuche (z.B. mit unterschiedlichen Startwerten) durchgeführt werden konnten.
- Der Wellenstrang des 740 MW Turbosatzes weist im Gegensatz zu dem des 150 MW Turbosatzes häufige und starke Durchmesseränderungen auf, so daß es schwierig ist, ihn mit wenigen Elementen zu modellieren.
- Durch die Anpassung der Wellendurchmesser an die 1. Eigenfrequenz der Einzelbauteile erhielt man bei dem Ausgangsmodell für den 150 MW Turbosatz schon recht genaue Werte, so daß bei der Parameteranpassung vorwiegend die Lagersteifigkeiten verändert werden mußten. Bei der Anpassung der Korrekturparameter des 740 MW Turbosatzes fallen starke Änderungen der Parameter auf, die anschaulich schlecht erklärt werden können.
- Die Frequenzgänge des 150 MW Turbosatzes weisen relativ deutliche Resonanzstellen auf, während die des 740 MW Turbosatzes viele, zum Teil schlecht interpretierbare Spitzen aufweisen. Wahrscheinlich ist der große Turbosatz auch besser ausgewuchtet, so daß die Resonanzstellen nicht so deutlich ausgeprägt sind.

8.6 Einige Schlußfolgerungen für die Systemidentifikation mit Korrekturparametern

Bei der Identifikation des 740 MW Turboblocks traten wesentlich mehr Schwierigkeiten auf, als bei dem 150 MW - Turbosatz. Aus den Unterschieden bezüglich der Bauart der Turboblöcke und der Versuchsdurchführung, sowie aus grundlegenden Untersuchungen (s. /86/) lassen sich wichtige Erkenntnisse gewinnen, die während einer Identifikation bei der Korrektur der Steifigkeitsmatrix zu beachten sind:

- Bei Strukturen mit stark abgesetzten Wellen ($d_1/d_0 > 1,25$) erscheint es wenig sinnvoll, die gesamte abgesetzte Welle zu einer Substruktur zusammenzufassen. In Anbetracht der Tatsache, daß zumindest die ersten beiden Eigenfrequenzen der

Einzelwellen fast ausschließlich von den biegeweichen Abschnitten bestimmt werden, erscheint es in solchen Fällen vielmehr angebracht, lediglich die Steifigkeit dieser Bereiche zu korrigieren. Dabei könnte die Korrektur auch in der Weise erfolgen, daß die biegeweichen Wellenabschnitte in einer Substruktur zusammengefaßt werden.

- Das Rechenmodell muß die Symmetrien und Unsymmetrien der vorliegenden Struktur bereits genau beinhalten. Eine diesbezügliche Korrektur kann aufgrund der Zuordnung der Eigenvektoren während der Identifikation nicht mehr erfolgen.
- Bei Bauteilen mit großen Durchmessersprüngen sollten die biegeweichen Teile wesentlich feiner diskretisiert werden als die biegesteifen, die sich in den ersten Eigenschwingungen nicht stark verformen.
- Wegen des geringen Einflusses der biegesteifen Teile auf die Eigenfrequenzen sollten nur die biegeweichen Teile mit Korrekturparametern versehen werden.
- Um die Übersichtlichkeit und numerische Stabilität der Identifikationsrechnung zu gewährleisten, sollten möglichst kleine Einheiten mit möglichst wenig Korrekturparametern gleichzeitig angepaßt werden. So kann man z.B. die Wellendurchmesser der einzelnen Baugruppen zunächst an die Eigenfrequenzen der Einzelbauteile, sie sind z.B. fein diskretisierten Rechnungen oder Wuchtprotokollen zu entnehmen, und dann die Lagersteifigkeiten an die Eigenfrequenzen des Gesamtsystems anpassen.

9. Zusammenfassung und Ausblick

Diese Arbeit beschäftigt sich mit dem Einsatz von Zustandsbeobachtern, die aus der Regelungstechnik bekannt sind, für Aufgaben der Schwingungsüberwachung, Lebensdauerberechnungen und Schadensfrüherkennung. Betrachtet werden große resonanzfähige Strukturen wie Türme, Schornsteine, Brücken oder Maschinen, die sich durch lineare Systemgleichungen mit beliebiger viskoser Dämpfung beschreiben lassen.

Die Methode der Zustandsbeobachter ist für regelungstechnische Aufgabenstellungen entwickelt worden, um den vollständigen dynamischen Zustand eines Systems mit Hilfe der Messung weniger Größen in Kombination mit einem Rechenmodell zu schätzen. Die Beobachterentwurfsverfahren sind im Unterschied zu den hier betrachteten Zielsetzungen üblicherweise auf die Entwicklung optimaler Regelungen abgestimmt.

Der Einsatz von Beobachtern für die **Schwingungsüberwachung** großer mechanischer Konstruktionen ist problematisch, denn die hier betrachteten Systeme lassen sich nur mit einer großen Anzahl von Freiheitsgraden sinnvoll modellieren. Im Gegensatz dazu muß die Anzahl der Beobachterfreiheitsgrade klein sein, da Schwingungsüberwachungen Echtzeitrechnungen erfordern und zudem beim Beobachterentwurf numerische Probleme (z.B. Konvergenzschwierigkeiten) mit zu großen Rechenmodellen entstehen können. Abhilfe schafft der hier beschriebene "modale Beobachter", mit dem es gelingt, auf der Grundlage der Modalanalyse die Anzahl der Freiheitsgrade zu reduzieren und so die zahlreichen Beobachterentwurfsverfahren der Regelungstechnik auch hier anwendbar zu machen.

Die verwendeten Identitätsbeobachter, die den vollständigen Systemzustand schätzen, können außerdem zur Bestimmung und **Überwachung wichtiger Systemparameter** eingesetzt werden. Durch eine Minimierung der Abweichung zwischen Meßwerten und entsprechenden geschätzten Zustandsgrößen lassen sich Informationen über das reale System gewinnen. Mit den vorgestellten Verfahren können Eigenfrequenzen, Dämpfungen, Korrekturfaktoren der Steifigkeitsmatrix, Betrag und Phase von Unwuchten und Korrekturparameter der Eingangsmatrix ermittelt werden.

Im Hinblick auf einen praxisorientierten Einsatz von Zustandsbeobachtern für die oben genannten Aufgabenstellungen fanden folgende Punkte besondere Berücksichtigung:

- Erstellung eines für einen "modalen Beobachter" geeigneten Rechenmodells
- Reduktion der Freiheitsgrade durch Verfahren der Modalanalyse
- Entwurf eines "modalen Beobachters"
- Schätzung und Überwachung von Systemparametern (z.B. Eigenfrequenzen, Korrekturfaktoren der Steifigkeitsmatrix) mit einem Beobachter

Anhand von Simulationsrechnungen und Laborversuchen an einem einseitig eingespannten Biegebalken und einer zu Torsionsschwingungen angeregten rotierenden Welle lassen sich folgende Möglichkeiten und Einschränkungen bei der Anwendung der vorgestellten Verfahren aufzeigen:

Mit einem "modalen Beobachter" ist es möglich, den vollständigen Beanspruchungszustand großer resonanzfähiger Systeme zu schätzen und trotzdem nur wenige Freiheitsgrade bei der Beobachtungsrechnung zu verwenden. Wie der Versuch an der Torsionswelle zeigt, lassen sich die günstigen Eigenschaften eines Beobachters, der auch bei Modellierungsungenauigkeiten, unbekanntem Eingangsrößen und Meßfehlern noch brauchbare Schätzungen der Zustandsgrößen liefert, auch auf die betrachteten Überwachungsaufgaben übertragen. Die Vernachlässigung der höheren, nicht oder nur wenig angeregten Eigenschwingungen verursacht bei dem eingespannten Balken keine wesentlichen Beobachtungsfehler

In beiden Laborversuchen ist sich eine künstlich angebrachte Beschädigung durch die Minimierung des Beobachterfehlers aufzufinden. Veränderungen der Eigenfrequenzen des realen Systems sind gut zu bestimmen, und da die Eigenwerte die Elemente des modal transformierten Rechenmodells sind, lassen sich die Beobachtermatrizen leicht an die neuen Eigenfrequenzen anpassen. Die Lokalisierung der Beschädigung ist problematischer, da die Anpassung der Steifigkeitsmatrix eine genaue Bestimmung der Eigenfrequenzen erfordert, was wiederum genaue Meßwerte und gute Kenntnis der Schwingungserregung voraussetzt. Die Tatsache, daß für eine Anpassung der Eigenfrequenzen die entsprechenden Eigenschwingungen angeregt sein müssen, begrenzt die Anwendung dieses Verfahrens. Deshalb sind unregelmäßige Erregungen wie Schläge, Rauschen und Wind besonders geeignet.

Die gleichzeitige Schätzung von Zustandsgrößen und Systemeigenfrequenzen mit einem erweiterten Kalman Filter ist zwar in Simulationsrechnungen möglich, hat aber schlechte Konvergenzeigenschaften und benötigt viel Rechenzeit pro Zeitschritt.

Der Einsatz eines "modalen Beobachters" ist ein wirksames Mittel zur Überwachung des Schwingungs- und Belastungszustandes gleichlaufender Großmaschinen, z.B. Kraftwerksturbinen. Da in der Betriebsdrehzahl nur wenige Eigenschwingungen angeregt werden, läßt sich hier die Anzahl der Freiheitsgrade sehr stark reduzieren.

Die vorgestellte Anpassung charakteristischer Systemparameter erscheint besonders bei einer Anwendung auf stochastisch erregte Systeme, z.B. Bauwerke unter Windbelastung und Fahrzeuge bei einer Erregung durch Fahrbahnunebenheiten, vielversprechend. Bei derartigen, breitbandigen Erregungen werden die Eigenschwingungen deutlich angeregt, und hierbei beeinflussen nicht meßbare Eingänge in Form von weißem Rauschen die Parameterschätzung nur unwesentlich.

A1 Das verwendete Verfahren zur direkten Identifikation modaler Systemparameter

A1.1 Allgemeines zur Identifikation

Eine Identifikation des Schwingungsverhaltens des realen Systems erwies sich als notwendig, um das Rechenmodell, das dem Beobachterentwurf zugrunde liegt, auf seine Genauigkeit zu überprüfen und um es gegebenenfalls durch eine Anpassung an die identifizierten Werte zu verbessern. Bei Erstellung eines Rechenmodells soll einerseits das Schwingungsverhalten möglichst genau wiedergegeben werden, andererseits darf die Anzahl der Freiheitsgrade, die das Modell aufweist, aus Gründen der Rechenzeit und des Speicherplatzes nicht beliebig groß sein, so daß in der Regel nicht alle Einzelheiten modelliert werden können. Sehr große Rechenmodelle (viele Freiheitsgrade) haben zudem den Nachteil, daß man leicht numerische Schwierigkeiten, z. B. bei Gleichungslösern und Eigenwertlösern, erhält. Außerdem werden sehr fein diskretisierte Modelle schnell so unübersichtlich, daß sich leicht Fehler einschleichen.

Das mathematische Modell wird aus Vorkenntnissen über das reale System, wie Massenverteilungen, Steifigkeiten, Werkstoffverhalten etc. berechnet. Aus folgenden Gründen wird das Modell aber noch Ungenauigkeiten enthalten:

- Die Modellbildung ist stets eine Vergrößerung des wirklichen Systems (je weniger Freiheitsgrade das Modell enthält, desto weniger Einzeleffekte können berücksichtigt werden).
- Nichtlinearitäten werden in der Regel um den Arbeitspunkt linearisiert (z.B. Gleitlager, Paßfedern).
- Die Systemparameter, insbesondere die Dämpfungsparameter, sind nicht exakt bestimmbar.
- Durch Fertigungstoleranzen können sich Realität und Modell unterscheiden.

Wegen der Vielzahl der Parameter ist es bei größeren Strukturen nicht möglich, Massen-Steifigkeits- und Dämpfungsmatrix des Rechenmodells direkt zu identifizieren. Aus diesem Grund werden Größen bestimmt, mit denen sich das Schwingungsverhalten charakterisieren läßt. Mit dem hier beschriebenen Verfahren sind die modalen Systemparameter, d.h. Eigenfrequenzen, Dämpfungen und Eigenformen zu bestimmen.

Die Identifikation im Frequenzbereich wird in der Regel anhand von Übertragungsfunktionen durchgeführt. Sie können auf unterschiedliche Arten gewonnen werden. Am einfachsten erhält man sie als Fouriertransformierte des Ausschwingvorgangs freier Schwingungen. Der Schwingungszustand läßt sich dann als Summe der Eigenschwingungen des Systems darstellen. Bei der Identifikation modaler Schwingungsgrößen im Frequenzbereich wird versucht, die Eigenschwingungsparameter des Systems (Frequenz, Dämpfung, Phase, Amplitude an der Meßstelle) so zu bestimmen, daß die Fouriertransformierte dieser Eigenschwingungen möglichst gut mit der Fouriertrans-

formierten des Meßsignals, bzw. mit der Übertragungsfunktion übereinstimmt. Das für die in den Abschnitten 6 und 7 beschriebenen Versuche verwendete Verfahren wurde von D. Bouchard entwickelt und bestimmt aus Form, Größe und Lage der Peaks (Spitzen im Kurvenverlauf, die bei den Resonanzfrequenzen auftreten) direkt die zugehörigen modalen Schwingungsparameter (Einzelheiten s. /59/, /60/).

A1.2 Die Identifikation modaler Schwingungsparameter

Das im folgenden beschriebene Verfahren dient dazu, die Parameter freier Schwingungen mit Hilfe der FFT (Fast-Fourier-Transformation) zu bestimmen. Es ist speziell für lineare Schwingungssysteme mit geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung entwickelt worden. Das Wesentliche des Verfahrens ist die Berücksichtigung der sogenannten systematischen Fehler der FFT bei der Auswertung (/87/,/88/). Diese Vorgehensweise ermöglicht genaue Ergebnisse und eine gute Trennung überlagerter Schwingungen. Weil das Verfahren mit direkten Gleichungen zur Bestimmung der modalen Systemparameter (Frequenz, Dämpfung, Amplitude, Phase der Eigenschwingungen) arbeitet, benötigt es nur sehr wenig Rechenzeit.

Die Eigenschwingungen linearer, schwach gedämpfter Systeme sind exponentiell abklingende Sinusfunktionen. Wird die Meßzeit so groß gewählt, daß die Schwingung fast abgeklungen ist, so nähert sich die diskrete Transformierte der analytischen Transformierten dieser Funktion an. Darauf basiert die herkömmliche Auswertung der FFT freier Schwingungen. Zur Erfassung auch hochfrequenter Schwingungsanteile ist eine feine Diskretisierung erforderlich. Das Verfahren wird damit speicherplatz- und rechenzeitintensiv. Bei begrenzter Speicherkapazität und Rechenzeit werden sogenannte Fensterfunktionen verwendet oder eine Zoom-Analyse durchgeführt.

Als Alternative dazu bietet sich an, die speziellen Eigenschaften der FFT bei der Auswertung zu berücksichtigen und dadurch verursachte Fehler zu eliminieren.

Die Zeitlösung eines linear gedämpften Einmassenschwingers, bzw. einer Eigenschwingung eines linearen Systems mit geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung läßt sich durch folgende Gleichung beschreiben:

$$\tilde{x}(t) = x_0 e^{(\delta + j \Omega) t} + \bar{x}_0 e^{(\delta - j \Omega) t} \quad (A1.1)$$

x_0 : komplexe Amplitude einer Eigenschwingung

\bar{x}_0 : konjugiert komplexe Amplitude einer Eigenschwingung

δ : Dämpfung

Ω : Eigenfrequenz

Diese Funktion wird für die begrenzte Meßzeit $0 \leq t \leq T$ fouriertransformiert.

$$\begin{aligned} \tilde{X}(\omega) &= \int_0^T \tilde{x}(t) e^{-j \omega t} dt \\ &= \int_0^T x_0 e^{(\delta + j(\Omega - \omega)) t} dt + \int_0^T \bar{x}_0 e^{(\delta + j(-\Omega - \omega)) t} dt \\ &= \frac{x_0}{\delta + j(\Omega - \omega)} \left(e^{(\delta + j(\Omega - \omega)) T} - 1 \right) \\ &\quad + \frac{\tilde{x}_0}{\delta + j(-\Omega - \omega)} \left(e^{(\delta + j(-\Omega - \omega)) T} - 1 \right) \quad . \quad (A1.2) \end{aligned}$$

Für positive Frequenzen ist der konjugiert komplexe Anteil von Gl. A1.1, d.h. der untere Term von Gl. A1.2 zunächst vernachlässigbar und es wird zur Berechnung einer ersten Näherung nur der obere Term berücksichtigt.

$$X(\omega) = \frac{x_0}{\delta + j(\Omega - \omega)} \left(e^{(\delta + j(\Omega - \omega)) T} - 1 \right) \quad . \quad (A1.3)$$

Mit dem Abstand zweier Diskretisierungspunkte im Frequenzbereich

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (A1.4)$$

wird aus Gründen der Schreibvereinfachung folgende Normierung eingeführt:

$$n = \frac{\omega}{\Delta\omega} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (A1.5)$$

$$b = \frac{\Omega}{\Delta\omega} \quad (b \in \mathbb{R}) \quad (A1.6)$$

$$d = \frac{\delta}{\Delta\omega} \quad (d \in \mathbb{R}, d \leq 0) \quad (A1.7)$$

Man erhält damit folgende analytisch berechneten Punkte der diskreten Fouriertransformation:

$$X(n) = \frac{x_0}{d + j(b - n)} \frac{T}{2\pi} \left(e^{2\pi(d + j b)} - 1 \right) \quad , \quad n = 0, \dots, M \quad (A1.8)$$

M: Anzahl der Meßwerte

Für den Sonderfall der ungedämpften, ganzzahligen Schwingung ($d = 0, b = 1, 2, \dots, M$), in dem die Gleichung einen unbestimmten Ausdruck liefert, ergibt sich durch Grenzwertbildung :

$$X(n) = \begin{cases} x_0 T & \text{für } n = b \\ 0 & \text{für } n \neq b \end{cases} \quad (\text{A1.9})$$

Dieser Sonderfall ist sehr leicht auszuwerten. Aber auch für den Normalfall kann die obige Gleichung durch folgende Operationen leicht umgestellt werden:

$$n \rightarrow n + 1$$

$$\Rightarrow X(n+1) = \frac{x_0}{d + j(b - n - 1)} \frac{T}{2\pi} \left(e^{2\pi(d + jb)} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{X(n)}{X(n+1)} = \frac{d + j(b - n - 1)}{d + j(b - n)}$$

$$\Rightarrow b - jd = n + \frac{X(n+1)}{X(n+1) - X(n)} \quad (\text{A1.10})$$

Nach Einsetzen erhält man

$$x_0 = X(n) \frac{2\pi}{T} \frac{d + j(b - n)}{\left(e^{2\pi(d + jb)} - 1 \right)} \quad (\text{A1.11})$$

Mit diesen Gleichungen ist bereits eine Auswertung der diskreten Fouriertransformation des Ausschwingvorgangs möglich. Es ist zu sehen, daß die notwendige Information zur Bestimmung der Parameter einer Schwingung bereits in zwei komplexen Werten der in den Frequenzbereich transformierten Zeitfunktion enthalten ist. Die Gleichungen lassen sich jedoch auf die Verwendung einer größeren Zahl von Frequenzpunkten erweitern, so daß man bei der Bestimmung der Parameter eine Mittelung über mehrere Punkte erhält.

$$b - n - jd = \frac{X(n+1)}{X(n+1) - X(n)} = 1 + \frac{X(n)}{X(n+1) - X(n)}$$

$$b - n - jd - 1 = \frac{X(n)}{X(n+1) - X(n)}$$

Mit $n = n + 1$ ergibt sich

$$b - n - jd - 2 = \frac{X(n+1)}{X(n+2) - X(n+1)}$$

$$\frac{b - n - jd - 2}{b - n - jd} = 1 - \frac{2}{b - n - jd} = \frac{X(n+1) - X(n)}{X(n+2) - X(n+1)}$$

Schließlich erhält man

$$b - n - j d = 2 \frac{X(n+2) - X(n+1)}{X(n+2) - 2 X(n+1) + X(n)} \quad (A1.12)$$

Es ist eine Gleichung entstanden, mit der die beiden Parameter b und d direkt aus drei Punkten im Frequenzbereich berechnet werden. Durch mehrfache Anwendung der gleichen Umformungen entstehen Gleichungen in die beliebig viele Punkte eingesetzt werden können. Es läßt sich eine allgemeine Mehr-Punkte-Gleichung aufstellen, in der auch die Zwei-Punkte-Gleichung enthalten ist.

$$b - j d = n + (m - 1) \frac{\sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k+1} \binom{m-2}{k-1} X(n+m-k)}{\sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} \binom{m-1}{k-1} X(n+m-k)} \quad (A1.13)$$

m : Anzahl der eingesetzten Frequenzpunkte

Die zur Auswertung benutzten Frequenzpunkte sollten so gewählt werden, daß die der gemessenen Frequenz am nächsten liegenden Werte, d.h. die betragsmäßig größten Werte, mit den größten Wichtungsfaktoren multipliziert werden. Der Einfluß von Störungen, z. B. dem Meßrauschen, wird dadurch so gering wie möglich gehalten. Das Kriterium dafür lautet:

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} - 1 &\leq b - n \leq \frac{m}{2} && \text{für gerade } m \\ \frac{m+1}{2} - 1 &\leq b - n \leq \frac{m+1}{2} && \text{für ungerade } m \end{aligned}$$

Eine Mehr-Punkte-Gleichung kann ebenfalls zur Amplitudenbestimmung hergeleitet werden. Ausgegangen wird dabei von der Gleichung

$$X(n) = \frac{-j x_0}{b - n - j d} \frac{T}{2 \pi} \left(e^{2 \pi (d + j b) n} - 1 \right)$$

Zur besseren Handhabung werden die folgenden Schreibvereinfachungen eingeführt:

$$x_0^* = -j x_0 \frac{T}{2 \pi} \left(e^{2 \pi (d + j b) n} - 1 \right) \quad (A1.14)$$

und

$$c_n = b - n - j d \quad (A1.15)$$

Damit ergibt sich folgende Gleichung:

$$X(n) = \frac{x_0^*}{c_n}$$

Für $n \rightarrow n + 1$ erhält man mit $c_{n+k} = c_{n-k}$ die Gleichung

$$X(n+1) = \frac{x_0^*}{c_{n+1}} = \frac{x_0^*}{c_n - 1} .$$

Diese beiden Gleichungen lassen sich zusammenfassen und nach der Amplitude auflösen.

$$X(n+1) - X(n) = \frac{x_0^*}{c_n - 1} - \frac{x_0^*}{c_n} = \frac{x_0^*}{(c_n - 1) c_n}$$

$$x_0^* = [X(n+1) - X(n)] (c_n - 1) c_n$$

Daraus wird ausgeschrieben folgende Gleichung

$$x_0 = j [X(n+1) - X(n)] \frac{2 \pi}{T} \frac{(b - n - j d - 1) (b - n - j d)}{(e^{2 \pi (d + j b)} - 1)} . \quad (A1.15)$$

Auch hier läßt sich das Vorgehen wiederholen. Wegen der bei der Erweiterung auftretenden Gesetzmäßigkeiten kann hier ebenfalls eine allgemeine Mehr-Punkte-Gleichung aufgestellt werden.

$$x_0^* = \frac{1}{(m - 2)!} \sum_{k=2}^m (-1)^k \binom{m-2}{k-2} X(n+m-k) \prod_{k=2}^m (c_n - m + k) . \quad (A1.16)$$

Ausgeschrieben hat diese Gleichung die Form

$$x_0 = \frac{j}{(m - 2)!} \sum_{k=2}^m (-1)^k \binom{m-2}{k-2} X(n + m - k) \prod_{k=2}^m (b - n - j d - m + k) \frac{\frac{2 \pi}{T}}{e^{2 \pi (d + j b)} - 1} . \quad (A1.17)$$

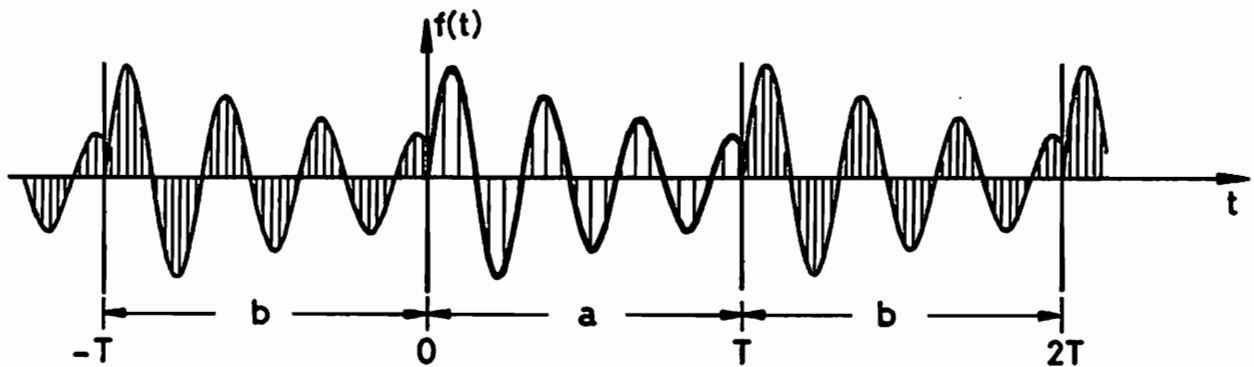
Durch die Mehr-Punkte-Gleichungen ist es möglich, eine beliebige Anzahl von Frequenzpunkten in die Auswertung einzubeziehen, ohne daß der Charakter der Methode, die direkte Auswertung mit expliziten Gleichungen, verloren geht.

Bei den freien Schwingungen komplizierterer mechanischer Systeme treten in der Regel mehrere solcher hier betrachteten abklingenden harmonischen Funktionen gleichzeitig auf. Die gemessene Schwingung wird ja auch deshalb in den Frequenzbereich transformiert, weil damit eine Trennung der einzelnen Eigenschwingungen, die sich in der Frequenz fast immer deutlich unterscheiden, erreicht wird. Eine vollständige Trennung erfolgt dadurch jedoch nicht. Zwar treten die Maximalwerte bei der diskreten Fouriertransformation immer im Bereich der gemessenen Schwingungsfrequenz auf, jedoch können die von Schwingungen großer Amplituden erzeugten Werte die Spitzenwerte benachbarter

schwach angeregter Schwingungen überdecken. Um auch in schwierigen Fällen eine ausreichende Genauigkeit zu erreichen, empfiehlt sich bei der Auswertung überlagerter Schwingungen das im folgenden beschriebene systematische Vorgehen. Durch eine einfache Iteration können die Werte weiter verbessert werden.

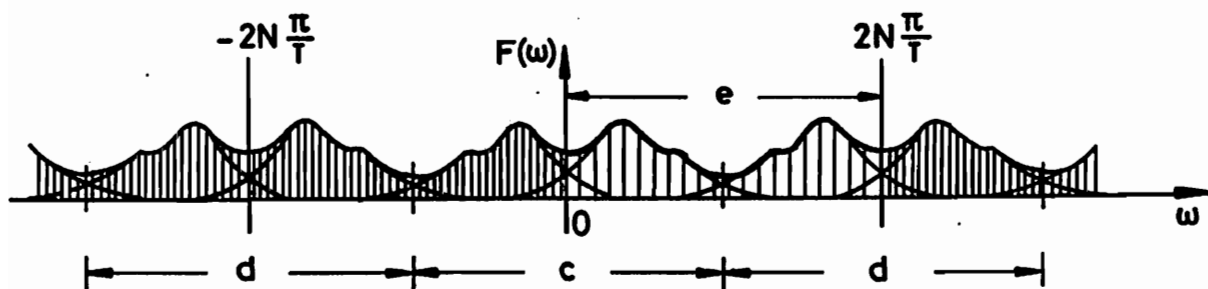
Während bei der ersten Schätzung der Modalparameter noch davon ausgegangen wurde, daß die Fouriertransformierten der einzelnen Eigenschwingungen ungestört nebeneinander liegen, lassen sich durch das systematische Vorgehen folgende Eigenschaften der diskreten Fouriertransformation einer Summe von Eigenschwingungen berücksichtigen:

- Die Spektren der einzelnen Eigenschwingungen überlagern sich
- Die Spektren oberhalb der höchsten darstellbaren Frequenz nach Shannon werden in den darstellbaren Bereich hereingespiegelt (wichtig bei Eigenfrequenzen nahe der Shannon-Frequenz, s. Bild A1.1)
- Im Bereich kleiner Frequenzen hat der bei der Parameterbestimmung vernachlässigte konjugiert komplexe Anteil der Schwingung einen erheblichen Anteil auf das Spektrum (s. Bild A1.2).



a : zeitlich begrenzte Funktion

b : für diskrete Fouriertransformation gedachte periodische Fortsetzung



c : Fouriertransformierte, die durch die FFT-Werte explizit dargestellt wird

d : Implizit von der diskreten Fouriertransformation erzeugte periodische Wiederholungen

e : Eigentlich (im mathematischen Sinn) benutzter Frequenzbereich der diskreten Fouriertransformation

Bild A1.1 Abgeschnittene Zeitfunktion mit verbreiterem Spektrum

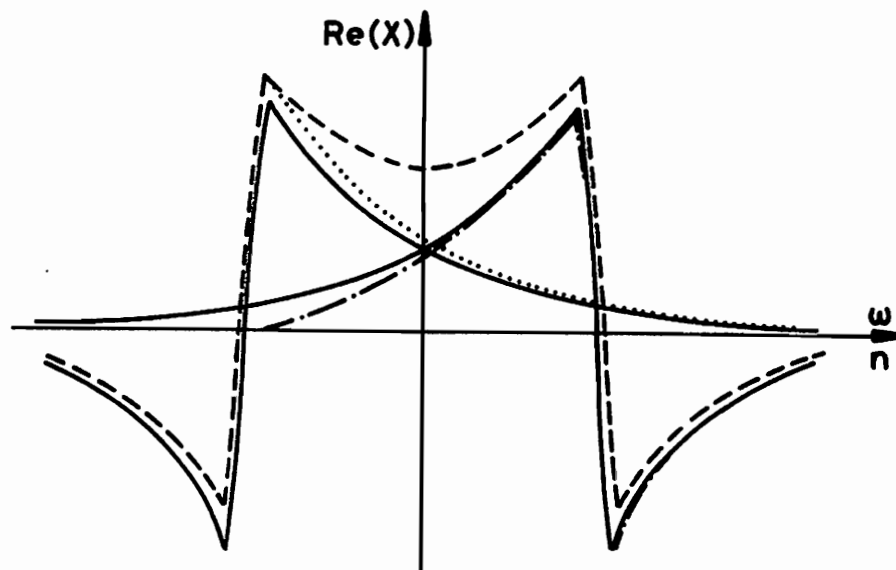
Mit folgender Gleichung läßt sich das Spektrum der diskreten Fouriertransformierten einer abklingenden harmonischen Funktion vollständig beschreiben:

$$X(n) = \frac{T}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{x_0}{d + j(b-n+kN)} \left(e^{2\pi(d+jb)_-1} \right) + \frac{\bar{x}_0}{d + j(-b-n+kN)} \left(e^{2\pi(d-jb)_-1} \right) \right\}$$

$$= \frac{T}{2N} \left\{ x_0 \left(e^{2\pi(d+jb)_-1} \right) + \bar{x}_0 \left(e^{2\pi(d-jb)_-1} \right) \right\} \quad (\text{A1.18})$$

Hier ist anzumerken, daß bei der Messung freier Schwingungen normalerweise nur die Summanden $k=-1, k=0, k=1$ einen beachtenswerten Einfluß auf das Spektrum haben.

Ein iteratives Vorgehen ermöglicht, den verfälschenden Einfluß dieser Eigenschaften der Spektren auf die ermittelten Parameter zu verhindern. Es wird zunächst für eine einzelne Schwingung beschrieben. Anschließend wird die Systematik beim Auswerten überlagerter Schwingungen dargestellt und zum Schluß die iterative Verbesserung der Ergebnisse für diesen Fall.



- für Auswertung benötigte Funktion und deren gespiegelte (Fehler)
- mit der diskreten Fourier-Transformation berechnete Funktion
- im 1. Iterationsschritt abgezogene Näherung für den Fehler
- · - · - verbesserte Funktion für die Auswertung im 2. Iterations schritt

Bild A1.2 Iterative Auswertung bei niedriger Frequenz

Die iterative Auswertung einer Schwingung bringt besonders bei extrem niedrigen Frequenzen, wie in Bild A1.2 gezeigt, oder bei extrem hohen Frequenzen (nahe der Grenzfrequenz nach Shannon) deutliche Verbesserungen der Ergebnisse.

Als Startwert für die Auswertung wird das betragsgrößte Element des Spektrums gesucht:

$$\left| X(n_{mB}) \right| \geq \left| X(n) \right| \quad , \quad n = 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad .$$

Eine erste Bestimmung des Frequenzparameters aus der Gleichung

$$\tilde{b}^0 - j \tilde{d}^0 = n_{mB} + \frac{X(n_{mB+1})}{X(n_{mB+1}) - X(n_{mB})}$$

dient zur Festlegung des optimalen Auswertepunktes:

$$n_0 \leq b < n_0 + 1 \quad . \quad (A1.19)$$

Damit erfolgt die Bestimmung aller Schwingungsparameter für den ersten Iterationsschritt

$$\tilde{b}^1 - j \tilde{d}^1 = n_0 + \frac{X(n_0+1)}{X(n_0+1) - X(n_0)} \quad ,$$

$$\tilde{x}_0^1 = \frac{2 \pi}{T} \frac{\tilde{d}^1 + j (\tilde{b}^1 - n_0)}{(e^{2 \pi (\tilde{d}^1 + j \tilde{b}^1)} - 1)} X(n_0) \quad ,$$

bzw.

$$\tilde{x}_0^1 = \frac{1}{T} X(n_0) \quad .$$

Hier beginnt die iterative Verbesserung der Ergebnisse, indem versucht wird, die Einflüsse der bisher vernachlässigten Anteile der diskreten Fouriertransformation auf den Funktionsverlauf zu eliminieren. Mit den Parametern aus der ersten Auswertung ($\tilde{b}^1, \tilde{d}^1, \tilde{x}_0^1$) werden diese Anteile näherungsweise bestimmt. Dazu werden in Gleichung A1.18 nur die Summanden für $k = -1, 0, 1$ berücksichtigt. Sie werden dann von den benutzten Spektralwerten abgezogen:

$$X^*(n) = X(n) - \frac{T}{2 \pi} \left[\left(\frac{\tilde{x}_0^1}{\tilde{d}^1 + j (\tilde{b}^1 - n - N)} + \frac{\tilde{x}_0^1}{\tilde{d}^1 + j (\tilde{b}^1 - n + N)} \right) (e^{2 \pi (\tilde{d}^1 + j \tilde{b}^1)} - 1) \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\tilde{x}_0^1}{\tilde{d}^1 + j (-\tilde{b}^1 - n - N)} + \frac{\tilde{x}_0^1}{\tilde{d}^1 + j (-\tilde{b}^1 - n)} + \frac{\tilde{x}_0^1}{\tilde{d}^1 + j (-\tilde{b}^1 - n + N)} \right) \right.$$

$$\left. (e^{2 \pi (\tilde{d}^1 - j \tilde{b}^1)} - 1) \right] + \frac{T}{2 N} \left[\tilde{x}_0^1 (e^{2 \pi (\tilde{d}^1 + j \tilde{b}^1)} - 1) \right.$$

$$\left. + \tilde{x}_0^1 (e^{2 \pi (\tilde{d}^1 - j \tilde{b}^1)} - 1) \right] \quad . \quad (A1.20)$$

Durch Abzug der gepunktet gezeichneten Näherungskurve in Bild A1.2 vom gestrichelt dargestellten Funktionsverlauf der diskreten Fourier-Transformation wird eine wesentlich bessere Annäherung (strichpunktiierte Linie) an die optimale Funktion (durchgezogene Linie) erreicht. Im zweiten Iterationsschritt erfolgt die Bestimmung der Schwingungsparameter wieder mit den Gleichungen A1.13 und A1.17 aber unter Verwendung der korrigierten Funktionswerte.

$$\tilde{b}^2 - j \tilde{d}^2 = n_0 + \frac{X^{*1}(n_{0+1})}{X^{*1}(n_{0+1}) - X^{*1}(n_0)} .$$

$$\tilde{x}_0^2 = \frac{2 \pi}{T} \frac{\tilde{d}^1 + j (\tilde{b}^1 - n_0)}{(e^{2 \pi (\tilde{d}^1 + j \tilde{b}^1)} - 1)} X^{*1}(n_0) ,$$

bzw.

$$\tilde{x}_0^2 = \frac{1}{T} X^{*1}(n_0) .$$

Die Korrektur des Funktionsverlaufs mit den ermittelten Parametern und die anschließende verbesserte Auswertung können beliebig oft wiederholt werden. In der Regel reichen aber 2 bis 3 Iterationen aus. Im Falle mehrerer überlagerter Schwingungen ist folgendermaßen vorzugehen:

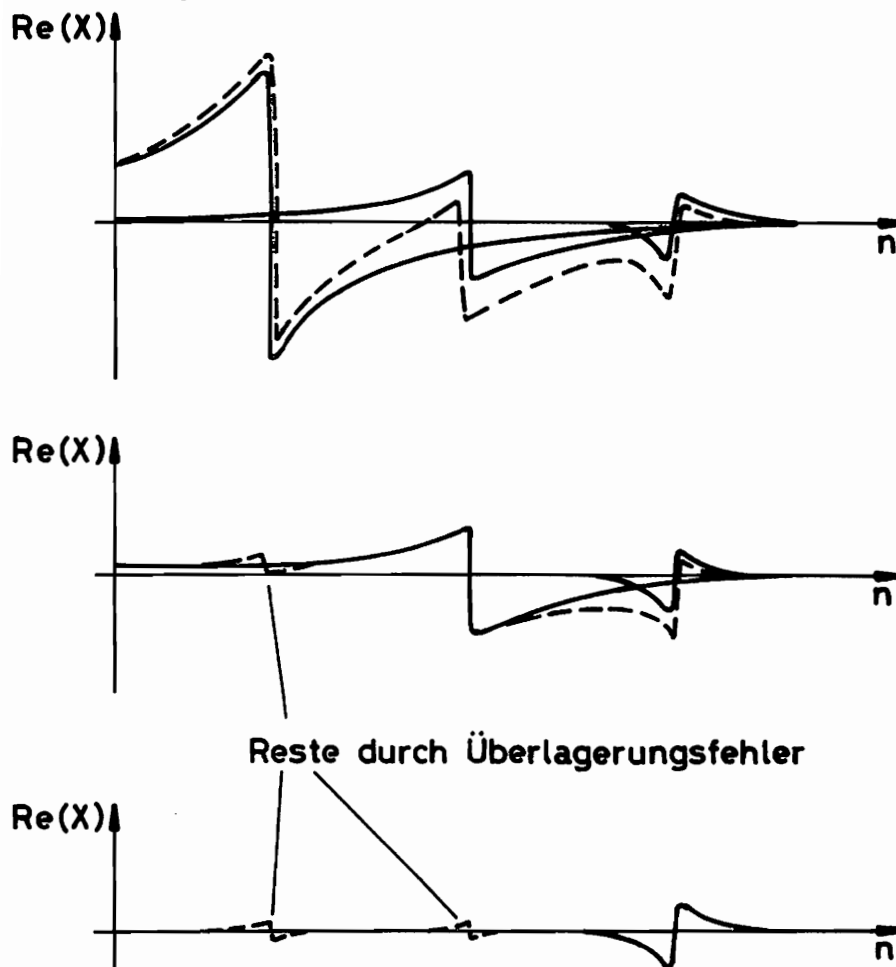


Bild A1.3 Systematische Auswertung bei 3 überlagerten Schwingungen

Als erstes werden die Parameter der Schwingung mit der größten Amplitude näherungsweise bestimmt. Das geschieht, wie für eine einzelne Schwingung beschrieben worden ist. Der Einfluß dieser Schwingung auf den Verlauf der gesamten Frequenzfunktion wird dann mit Hilfe dieser Näherungswerte soweit möglich eliminiert (Abzug der mit Gl A1.18 berechneten Werte der diskreten Fourier-Transformation dieser Eigenschwingung vom gemessenen Spektrum). Jetzt hat die nächstgrößere Schwingung die größte Amplitude, und es werden nun deren Parameter bestimmt und der Kufenverlauf vom Spektrum abgezogen. Die Parameter der übrigen Schwingungen werden nacheinander auf die gleiche Art bestimmt.

Die ermittelten Werte lassen sich durch mehrfach wiederholte Auswertungen iterativ verbessern. Dazu werden bei der Parameterbestimmung einer Eigenschwingung die Einflüsse aller übrigen, in vorhergehenden Rechenläufen identifizierten Schwingungen von dem Originalspektrum abgezogen (Bild A1.4). Nur in Ausnahmefällen ändern sich die Ergebnisse nach dem 3. Iterationsschritt noch (s. Bild A1.5).

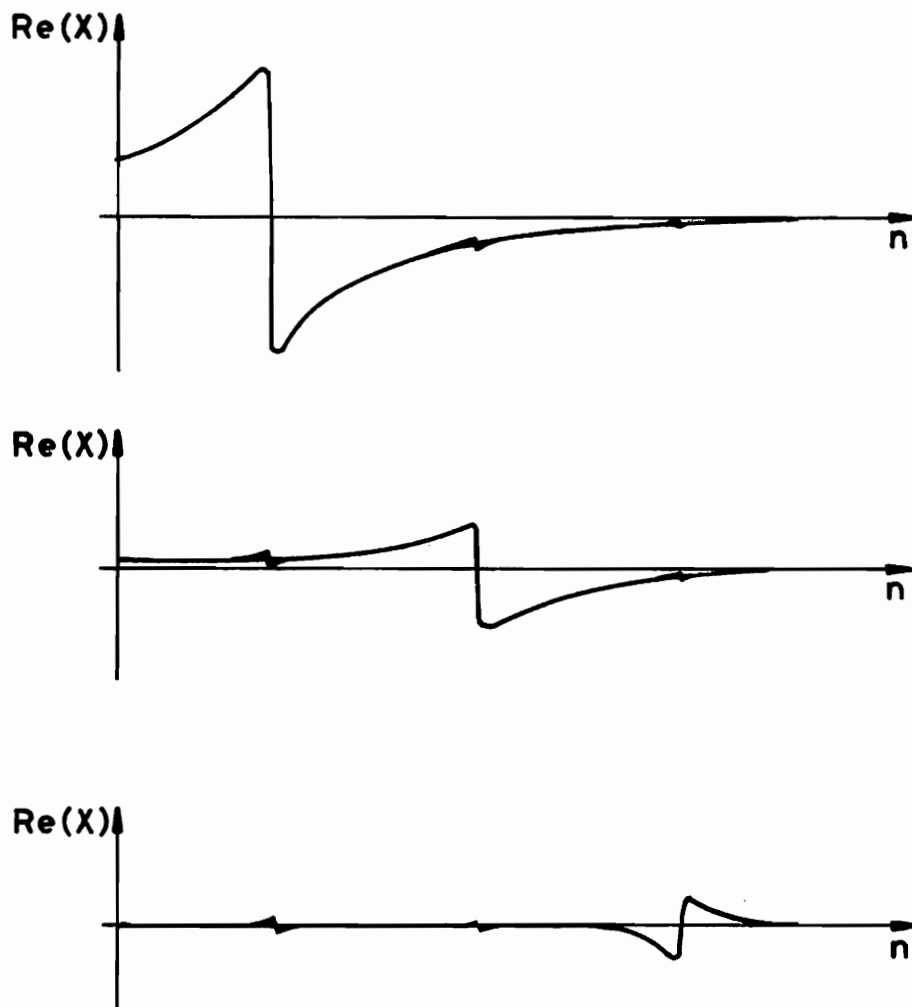
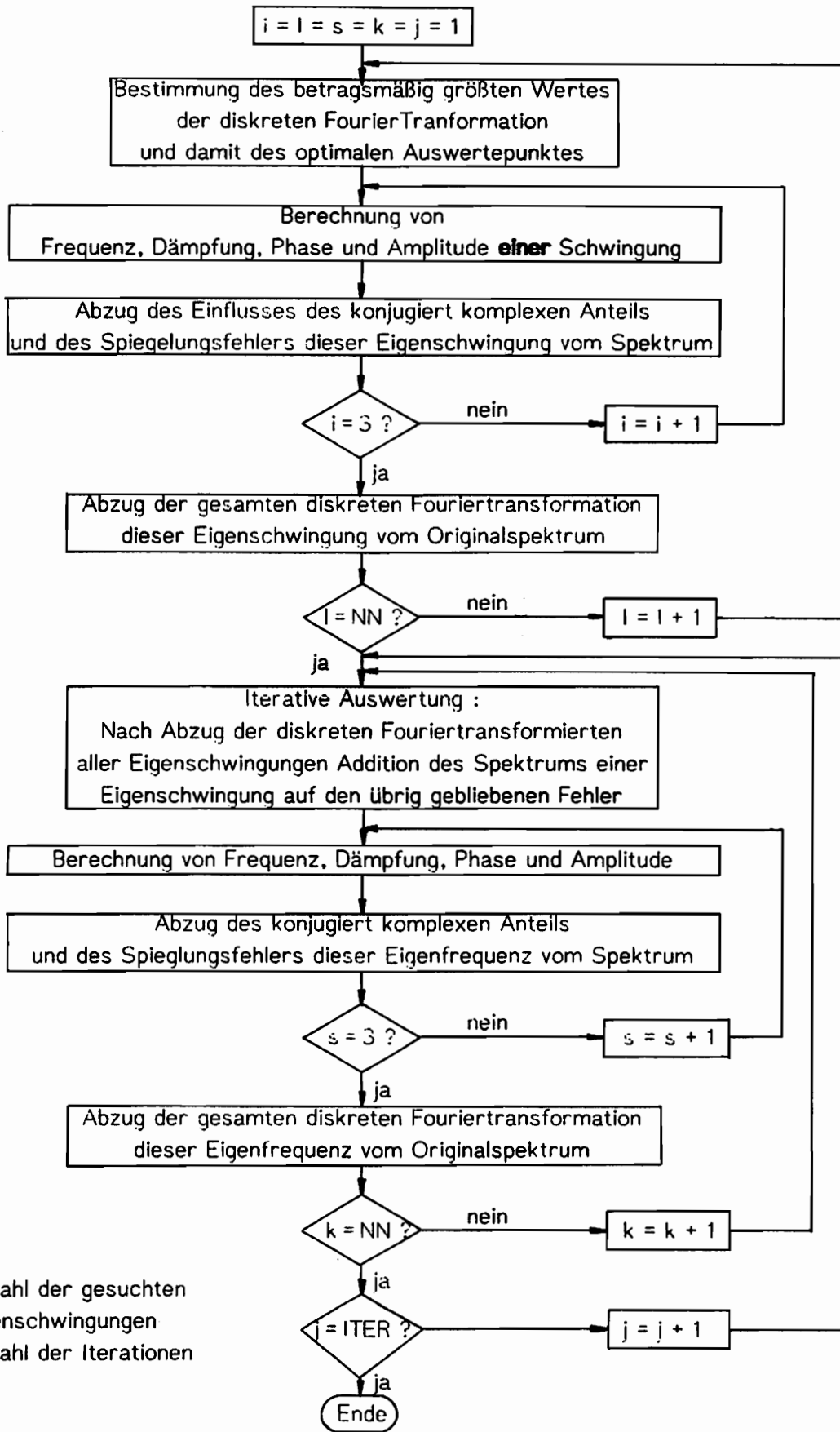


Bild A1.4 Verbesserte Auswertung durch Iterationsverfahren



NN : Anzahl der gesuchten Eigenschwingungen
ITER : Anzahl der Iterationen

Bild A1.4 Blockschaubild zur Identifikation modaler Systemparameter

Zusammenfassend sollen noch einmal die wichtigsten Eigenschaften dieses Verfahrens, das sich auch bei praktischen Anwendungen sehr gut bewährt hat, aufgeführt werden:

- Es ist beschränkt auf lineare Schwingungssysteme mit geschwindigkeitsproportionaler (nicht unbedingt modaler) Dämpfung.
- Eine feine Diskretisierung im Frequenzbereich ist nicht erforderlich, da Zwischenwerte bestimmt werden können.
- Ein Abbruch bei noch großen Schwingungsamplituden verringert die Genauigkeit der Auswertung nicht.
- Die Genauigkeit der Auswertung bleibt auch im unteren und oberen Bereich des Frequenzspektrums erhalten.
- Im Vergleich zu anderen Auswerteverfahren wird sehr wenig Rechenzeit und wenig Speicherplatz benötigt.

Literaturverzeichnis

- /1/ **Luenberger D.G.**
Determining the State of Linear Systems with Observers of Low Dynamic Order
Ph. D. Diss., Stanford University, 1963
- /2/ **Luenberger D.G.**
Observers for Multivariable Systems
IEEE Trans. Automatic Control, AC-11, pp 190-197, 1966
- /3/ **Luenberger D.G.**
An Introduction to Observers
IEEE Trans. Automatic Control, AC-16, pp 596-603, 1971
- /4/ **Ackermann J.**
Abtastregelung
Springer Verlag, 1972
- /5/ **Ackermann J.**
Abtastregelung
Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1983
- /6/ **O'Reilly**
Observer for Linear System
Academic Press, Inc. London, 1983
- /7/ **Waller H. / Krings W.**
Zur Berechnung von Bauwerkschwingungen bei Kernkraftwerken
Bauingenieur 54, S. 291-298, 1979
- /8/ **Korte R.**
Parameterbestimmung und Zustandsregelung an hydraulischen Antrieben
Fortschr.-Ber. VDI Reihe 8 Nr. 137, VDI Verlag Düsseldorf 1987
- /9/ **Wilharm H.**
Ein praktisch orientiertes Verfahren der Beobachterausslegung bei schwachgedämpften Mehrmassensystemen mit deterministischen Meßstörungen
Fortschr.-Ber. VDI-Z Reihe 8 Nr. 64, VDI-Verlag 1983
- /10/ **Wilharm H. / Fick H.**
Einsatz eines Beobachters zur genauen Bestimmung von Torsionsschwingungen
VDI-Berichte Nr. 320, 1978
- /11/ **Chen Han-Fu**
On Stochastic Observability and Controllability
Automatica Vol. 16, pp. 179-190, 1980

- /12/ **Kwakernaak H. / Sivan R.**
Linear Optimal Control Systems
John Wiley & Son Inc., 1972
- /13/ **Knobloch H.W. / Kwakernaak H.**
Lineare Kontrolltheorie
Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1985
- /14/ **Goodwin G. C. / Sin K. S.**
Adaptive Filtering Prediction and Control
Prentice Hall, New Jersey 1984
- /15/ **Isermann R.**
Parameter Adaptive Control Systems
IFAC Identification and System Parameter Estimation, York, UK, 1985
- /16/ **Brammer K. / Siffing G.**
Kalman-Bucy-Filter
R.Oldenbourg Verlag, München Wien, 1975
- /17/ **Schrack K.-W.**
Anwendungen der Kalman-Filter-Technik
R.Oldenbourg Verlag, 1977
- /18/ **Johnson C.D.**
On observers for systems with unknown and inaccessible inputs
Int. J. Control, Vol. 21, No. 5, 825-831, 1975
- /19/ **Müller P.C. / Truckenbrodt**
Entwurf eines optimalen Beobachters
Regelungstechnik, Heft 12, 1977
- /20/ **Missaghie M.M. / Fairman F.W.**
Sensitivity Reducing Observers for Optimal Feedback Control
IEEE Trans. on Autom. Control, Vol. AC-22, No. 6, pp 951-956, 1977
- /21/ **Doyle C. / Stein G.**
Robustness with Observers
IEEE Trans. on Autom. Control, Vol. AC-24, No. 4, pp 607-611, 1979
- /22/ **Aström K.J.**
Theory and Applications of Adaptive Control-A Survey
Automatica Vol. 19, No. 5, pp 471-486, 1983
- /23/ **Kreisselmeier G.**
The Generation of Law Structures for Globally Convergent Adaptive Observers
IEEE Trans. on Autom. Control, Vol. AC-24, No. 3, pp 510-512, 1979

- /24/ **Kreisselmeier G.**
Algebraic Separation in Realizing a Linear State Feedback Control Law by Means of
an Adaptive Observer
IEEE Trans. on Autom. Control, Vol. AC-25, No. 2, pp 238-243, 1980
- /25/ **Kopp R. E. / Oxford R.J.**
Linear Regression Applied to System Identification And Adaptive Control Systems
AIAA Journal, Vol. 1, No. 10, pp 2300-2326, 1963
- /26/ **Jazwinski A.H.**
Stochastic Process and Filtering Theory
Academic Press New York, 1970
- /27/ **Ljung L.**
Asymptotic Behavior of The Extended Kalman-Filter as a Parameter Estimator for
Linear Systems
IEEE Trans. on Autom. Control, Vol. AC-24, No. 1, 1979
- /28/ **Brammer K.**
Schätzung von Parametern und Zustandsvariablen linearer Regelstrecken durch
nichtlineare Filterung
Regelungstechnik und Prozeß-Datenverarbeitung Heft 6, S.255-261, 1970
- /29/ **Nelson L.W. / Stear E.**
The Simultaneous On-Line Estimation of Parameters And States in Linear Systems
IEEE Transactions on Automatic Control, pp 94-98, 1976
- /30/ **Litz L.**
Reduktion der Ordnung linearer Zustandsraummodelle mittels modaler Verfahren
Diss. Karlsruhe 1979
- /31/ **Stein J. / Fick H.**
The Torsional Stress Analyzer for Continuously Monitoring Turbine-Generators
IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-99. No. 2, pp 703-710
1980
- /32/ **Drechsler J.**
Torsional Vibrations in Large Turbine-Generator Units
International Center for Mechanical Sciences (CISM) in Udine, Italy,
October 7-11, 1985
- /33/ **Athans M.**
The Matrix Minimum Principle
Information and Control 11, pp 592-606, 1968

- /34/ **Frank P.M.**
Detektion von Sensorausfällen mit Methoden der Zusatzschätzung
VDI/VDE GMR-Bericht 1, April 1984
- /35/ **Evans R.J. / Goodwin G.C. / Felk R.A. / Martin C. / Lozano-Leal R.**
Aircraft Flight Data Compability Checking Using Maximum Likelihood and Extended Kalman Filter Estimation
IFAC Identification and System Parameter Estimation, York UK, 1985
- /36/ **Goßmann E.**
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfach-korrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen
Diss. am Institut f. Mechanik, Ruhr-Universität-Bochum, 1981
- /37/ **Unbehauen H. / Rao G. P.**
Identification of Continous Systems
North Holland, System and Control Series, Vol 10, Amsterdam 1987
- /38/ **Unbehauen H.**
System Identification Methods Using Parameter Estimation
2nd International Symposium on Systems Analysis and Simulation Berlin DDR, 26.-31. August 1985
- /39/ **Unbehauen H.**
Some Modern Developments in System Identification using Parameter Estimation Methods
Identification of Vibrating Structures, Springer-Verlag, 1982
- /40/ **Natke H.G.**
Einführung in Theorie und Praxis der Zeitreihen- und Modalanalyse
Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden 1983
- /41/ **Natke H.G.**
Identification of Vibrating Structures
Springer Verlag, Wien, New York 1982
- /42/ **Cottin N. / Natke H.G.**
On the Parameter Identification of Elastomechanical Systems Using Weighted Input And Modal Residuals
Ingenieur-Archiv 56, pp 106-113, 1986
- /43/ **Natke H.G.**
Angenäherte Fehlerermittelung für Modalsynthese-Ergebnisse innerhalb der System-analyse und Systemidentifikation
ZAMM 61, S.41-53, 1981

- /44/ **Young P.**
Recursive Estimation and Time-Series Analysis (An Introduction)
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1984
- /45/ **Ljung L. / Söderström T**
Theorie and Practice of Recursive Identification
1983
- /46/ **Kozin**
Estimation of Parameters for Systems driven by white noise Excitation
Akademie-Verlag, 1983
- /47/ **Goodwin G. / Payne R.**
Dynamic System Identification - Experiment, Design and Data Analysis
Academic Press, New York, San Francisco, London, 1977
- /48/ **Schwarz R.G.**
Identifikation mechanischer Mehrkörpersysteme
Fortschr. Ber. d. VDI Zeitschriften, Reihe 8, Nr. 30, 1980
- /49/ **Ibrahim S.R.**
Advances in Time Domain Modal Identification and Modeling of Structures
Symposium on Aeroelasticity and Structural Dynamics, Aachen, April 1985
- /50/ **Ibrahim S.R.**
Time Domain Parameter Identification and Modeling of Structures
Proc. of the American Control Conf., San Francisco, pp 989-996, 1983
- /51/ **Yongxin Yang**
A Time Domain Identification Technique : The Oversized Eigenmatrix (OEM) Method
Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, Vol. 107/53, 1985
- /52/ **Cox H.**
On The Estimation of State Variables And Parameters For Noisy Dynamik Systems
IEEE Trans. Autom.Control, VOL AC - 9, pp 5 - 12, 1963
- /53/ **Lozano R.**
Convergence Analysis of Recursive Identification Algorithms with Forgetting Factor
Automatica, Vol. 19, No. 1, pp 95-97, 1983
- /54/ **Wedig W.**
Zur Konvergenz linearer Identifikationsverfahren
ZAMM 66, T 106-T 109, 1986
- /55/ **Collatz / Wetterling**
Optimierungsaufgaben
Springer Verlag, 1966

- /56/ **Unbehauen H.**
Parameterschätzverfahren
R. Oldenbourg-Verlag, München, Wien, 1974
- /57/ **Aström K.J.**
Maximum Likelihood and Prediction Error Methods
Automatica, Vol. 16, pp 551-574, 1980
- /58/ **Waller H. / Schmidt R.**
Technisch Schwingungslehre für Ingenieure - Theorie, Simulation und Anwendung
BI - Verlag, Mannheim, erscheint Mitte 1988
- /59/ **Bouchard D.**
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaß-
ten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwin-
gungssysteme
Diss. am Institut für Mechanik, Ruhr-Universität Bochum, 1984
- /60/ **Bouchard D.**
Ein DFT-angepaßter, direkter Algorithmus zur modalen Identifikation freier Schwin-
gungen
VDI- Berichte Nr. 456, S.191-193, 1982
- /61/ **Waller H. / Krings W.**
Matrizenmethoden in der Maschinen- und Bauwerksdynamik
BI- Verlag, Mannheim
- /62/ **Krämer E.**
Maschinendynamic
Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1984
- /63/ **Dimarogones A.D. / Paipetis S.A.**
Analytical Methods in Rotor Dynamics
Applied Science Publishers, London, New York, 1983
- /64/ **Gasch R. / Pfützner H.**
Rotordynamik
Springer-Verlag, Berlin 1975
- /65/ **Allianz Berichte**
Schwingungsüberwachung bei Turbosätzen - ein Weg zur Erkennung von Wellen-
rissen
Allianz Versicherungs - AG, Heft Nr. 27, Berlin, München 1987
- /66/ **Wilsky A.S.**
A Survey of Design Methods for Failure Detection in Dynamic Systems
Automatica, Vol. 12, pp. 601-611, 1976

- /67/ **Peter U.**
Schwingungsüberwachung an großen Turbosätzen - Stand und sinnvolle Weiterentwicklung aus Betreibersicht
VDI Berichte Nr. 568, Schwingungsüberwachung von Maschinen, S.105-125, 1985
- /68/ **Wach D. / Sunder R. / Weingarten J.**
Überwachungssysteme und Diagnosetechniken zur Schadensfrüherkennung in Kernkraftwerken
Forschung in der Kraftwerkstechnik, S.13-23, 1983
- /69/ **Isermann R.**
Diagnosemethoden mit Modellbildung - Prozeßüberwachung und Fehlerdiagnose mit dynamischen Prozeßmodellen
VDI/VDE GMR-Bericht 1, April 1984
- /70/ **Markert R.**
System- und Unwuchtidentifikation von elastischen Rotoren aus Anfahrmessungen
VDI Berichte 536, Fahrzeugschwingungen, Bauwerksschwingungen, Rotordynamik, 1984
- /71/ **Wedig W.**
Überwachung der Systemparameter rotierender Maschinen
VDI Berichte 536, Fahrzeugschwingungen, Bauwerksschwingungen, Rotordynamik, 1984
- /72/ **Castorph D. / Hubensteiner M**
Schaufelkraftschwankungen niedriger Erregungsordnung in Axialturbinen
Forschung in der Kraftwerkstechnik, S. 214-219, 1983
- /73/ **Geis M. / Schmidt R. / Waller H.**
Schadensfrüherkennung an Großmaschinen durch Systemidentifikation
Brennstoffwärmekraft, Nr. 6, 1986
- /74/ **Waller H. / Schmidt R.**
Fault Detection on Turbomachinery by System Identification
VDI Berichte Nr. 644, S. 363-370, 1987
- /75/ **Schmidt R. / Waller H.**
Identifikation und Modellierung eines Turboblocks
Mitteilungen des Curt-Risch-Instituts, CRI-K 1/87, 1987
- /76/ **Singh M.G. / Hassan M.F. / Chen Y.L. / Li D.S. / Pan Q.R.**
New Approach to Failure Detection in Large-Scale Systems
IEE Proceedings, Vol.130 Pt. D, No.5, September 1983

- /77/ **Knobloch W.**
Wirtschaftliche Wartung von Kommunalfahrzeugen
Städtetag 12/1984
- /78/ **Yuen M. M. F.**
A Numerical Study of the Eigenparameters of a Damaged Cantilever
Journal of Sound and Vibration, Vol. 103, No. 3, pp 301-310, 1985
- /79/ **Dimarogonas A.A. / Papadopoulos C.A.**
Vibration of Cracked Shafts in Bending
Journal of Sound and Vibration, Vol. 91, No. 4, pp 583-593, 1983
- /80/ **Schmied J.**
Berechnete Unwuchtschwingungen eines Turbogenerators mit angerissenem Wellenquerschnitt
VDI Berichte Nr. 568, Schwingungsüberwachung von Maschinen, 1985
- /81/ **Buerhop H.**
Zur Berechnung der Biegesteifigkeit abgesetzter Wellen und Stäbe
1975
- /82/ **Sato H.**
Free Vibration of Beams with abrupt Changes of Cross-Section
Journal of Sound and Vibration, Vol. 89, No. 1, pp 59-64, 1983
- /83/ **Kitching R. / Sanderson N. / Hinduja S.**
Flexibility of Rectangular Beams with abrupt Changes of Cross-Section
Int.J. Mech. Sci. Pergamon Press, Vol. 17, pp 403-410, 1975
- /84/ **Gilenicke J.**
Einfluß der Gleitflächenform und anderer Lagerparameter auf die statischen und dynamischen Eigenschaften von Turbinenlagern
Forschungsvereinigung Verbrennungskraftmaschinen, Bericht 211/17, Frankfurt 1969
- /85/ **Rott U.**
Modellierung eines schwingungsfähigen mechanischen Systems und Anpassung charakteristischer Modellparameter an identifizierte Eigenschwingungsgrößen am Beispiel einer Kraftwerksturbine
Diplomarbeit am Institut für Mechanik, A.G. Num. Rechnen, Ruhr-Universität-Bochum, 1986
- /86/ **Nackenhorst U.**
Parametrische Identifikation von Biegeschwingungen an Modellwellen
Diplomarbeit am Institut für Mechanik, A.G. Num. Rechnen, Ruhr-Universität-Bochum, 1987

/87/ **Goßmann E. / Waller H.**

Rechnergestützte Schwingungsanalyse mit Hilfe der Fourier-Transformation
VDI-Z 122, Nr.11, 1980

/88/ **Brigham D.E.**

FFT Schnelle Fourier- Transformation
R. Oldenbourg- Verlag, München, Wien, 1987

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1 Theodor Lehmann:
Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations. Basic Concepts
- Nr. 3 Wolfgang Krings:
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viscoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4 Burkhard Lücke:
Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen elasto-plastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5 Knut Schwarze:
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6 Hubert Sommer:
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7 H. Stumpf/F.J. Biehl:
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendung zur Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8 Albert Meyers:
Ein Beitrag zum optimalem Entwurf von schnelllaufenden Zentrifugenschalen
- Nr. 9 Berend Fischer:
Zur zyklischen elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz:
Introduction to the non-linear theory of shells
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung
- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig:
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elasto-plastischer Wellen
- Nr. 13 Pawel Rafalski:
Minimum Principles in Plasticity

- Nr. 14 Peter Hilgers:
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert:
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16 Martin Fritz:
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen
- Nr. 17 H. Stumpf/F.J. Biehl:
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates
- Nr.18 Uwe Kolberg:
Variational principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalenträgwerken
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek:
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode
- Nr. 24 Ekkehard Goßmann:
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert:
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells

- Nr. 27 Georg Zander:
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast
- Nr. 28 Pawel Rafalski:
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 Franz-Josef Biehl:
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem
- Nr. 31 Maria K. Duszek:
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr. 32 Reinhard Piltner:
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzip der Thermoplastizität
I. Wärmeausbreitung und Plastizität
- Nr. 34 Helmut Stumpf:
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells
- Nr. 35 Bernd Kaempf:
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente
- Nr. 36 Alfred Kraft:
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzip der Thermoplastizität
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse
- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley:
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen
- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte:
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorie unter Berücksichtigung großer Rotationen

- Nr. 40 Ulrich Blix:
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode
- Nr. 41 Peter Becker:
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden
- Nr. 42 Dietmar Bouchard:
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme
- Nr. 43 Uwe Zdebel:
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermoelastischen Stoffgesetz
- Nr. 44 Jan Kubik:
Thermomodiffusion flows in a solid with a dominant constituent
- Nr. 45 Horst J. Klepp:
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme
- Nr. 46 J. Makowsky/L.-P. Nolte/H. Stumpf:
Finite in-plane deformations of flexible rods - insight into nonlinear shell problems
- Nr. 47 Franz K. Labisch:
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren
- Nr. 48 J. Chroscielewski/L.-P. Nolte:
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY
- Nr. 49 Karl-Heinz Bürger:
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung
- Nr. 50 Ulrich Schmid:
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern
- Nr. 51 Jörg Frischbier:
Theorie der Stoßbelastung orthotroper Platten und ihre experimentelle Überprüfung am Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK-Verbundplatte
- Nr. 52 W. Trampczynski:
Strain history effect in cyclic plasticity

- Nr. 53 Dieter Weichert:
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie
- Nr. 54 Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe:
Wellenausbreitung in akustischen Medien, Randelement-Prozeduren im 2-D Frequenzraum und im 3-D Zeitbereich
- Nr. 55 Wojciech Pietraszkiewicz:
Geometrically non-linear theories of thin elastic shells
- Nr. 56 J. Makowsky/H. Stumpf:
Finite strain theory of rods
- Nr. 57 Andreas Pape:
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells
- Nr. 58 Johannes Groß-Weege:
Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken
- Nr. 59 Peihua LIU:
Optimierung von Kreisplatten unter dynamischer nicht rotationssymmetrischer Last
- Nr. 60 Reinhard Schmidt:
Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 60**